



TITLE:

機能性エラストマーの数値解析理論に関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

石川, 覚志

CITATION:

石川, 覚志. 機能性エラストマーの数値解析理論に関する研究. 京都大学, 2009, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2009-05-25

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k14836>

RIGHT:

許諾条件により本文は2009-11-25に公開

機能性エラストマーの数値解析理論に関する研究

2009年

石川 覚 志

目 次

| | | |
|--------|----------------------------------|----|
| 第 1 章 | 序論 | 1 |
| 1.1. | 研究の位置づけ | 1 |
| 1.2. | 誘電流体・磁性流体・磁性エラストマー | 2 |
| 1.3. | 従来の研究 | 6 |
| 1.3.1. | 超弾性体のひずみエネルギー関数 | 6 |
| 1.3.2. | 磁性エラストマーの数値解析 | 12 |
| 1.4. | 本研究の目的と構成 | 15 |
| 第 2 章 | 異方性超弾性構成則 | 17 |
| 2.1. | 超弾性体 | 17 |
| 2.2. | 異方性超弾性体の構成則の導出 | 18 |
| 2.3. | 結論 | 30 |
| 第 3 章 | 異方性超弾性材料の応力解析 | 31 |
| 3.1. | 横等方性材料の応力理論解の導出 | 32 |
| 3.2. | 異方性のひずみエネルギー関数の導出と材料物性値同定手法 | 40 |
| 3.3. | ひずみエネルギー関数の検証 | 46 |
| 3.3.1. | 単軸試験 | 46 |
| 3.3.2. | 一軸拘束二軸引張試験 | 47 |
| 3.3.3. | 物性値の同定と有限要素法解析 | 53 |
| 3.3.4. | 解析結果と考察 | 53 |
| 3.4. | 曲げ変形での検証 | 56 |
| 3.4.1. | 曲げ試験概要 | 56 |
| 3.4.2. | 有限要素解析 | 57 |
| 3.4.3. | 解析結果と考察 | 57 |
| 3.5. | 結論 | 62 |
| 第 4 章 | 磁性エラストマーの超弾性構成則 | 63 |
| 4.1. | 磁性エラストマー | 63 |
| 4.2. | 磁性エラストマーの超弾性構成則の導出 | 64 |
| 4.3. | 結論 | 71 |
| 第 5 章 | 磁場中の磁性エラストマーのせん剛性変化 | 73 |
| 5.1. | 磁性エラストマーのひずみエネルギー関数の導出と材料物性値同定手法 | 73 |
| 5.2. | ひずみエネルギー関数の検証 | 78 |
| 5.2.1. | 試験片の作成方法と実験装置および実験方法 | 78 |
| 5.2.2. | 実験結果 | 85 |
| 5.2.3. | 物性値の同定と有限要素解析 | 89 |
| 5.2.4. | 解析結果と考察 | 89 |

| | | |
|--------|-------------------------------|-----|
| 5.3. | 単純せん断試験による検証 | 92 |
| 5.4. | 結論 | 96 |
| 第 6 章 | 磁場応力連成解析 | 97 |
| 6.1. | 磁性エラストマーを用いたサスペンションブッシュ | 97 |
| 6.2. | 磁束密度勾配を考慮したひずみエネルギー関数 | 99 |
| 6.3. | 磁場応力連成解析 | 99 |
| 6.4. | 数値実験 | 100 |
| 6.4.1. | 静磁場解析 | 100 |
| 6.4.2. | 応力解析 | 102 |
| 6.4.3. | 解析結果 | 102 |
| 6.5. | 結論 | 114 |
| 第 7 章 | 結論 | 115 |
| 参考文献 | | 117 |
| 関連発表論文 | | 121 |
| 謝辞 | | 123 |

変数表

| | |
|----------------|--|
| \mathbf{a}_0 | 初期配向ベクトル(initial fiber direction) |
| \mathbf{a} | 変形後の配向ベクトル(deformed fiber direction) |
| \mathbf{A} | Almansi ひずみテンソル(Almansi strain tensor) |
| \mathbf{b} | 左コーシー・グリーン変形テンソル (left Cauchy-Green deformation tensor) |
| \mathbf{B} | 磁束密度(magnetic flux density (vector)) |
| \mathbf{B}_0 | 初期配置の磁束密度(magnetic flux density (vector)) |
| \mathbf{B}_f | オイラー空間での磁束密度(magnetic flux density (vector)) |
| \mathbf{B}_l | ラグランジェ空間での磁束密度(magnetic flux density (vector)) |
| \mathbf{C} | 右コーシー・グリーン変形テンソル (right Cauchy-Green deformation tensor) |
| \mathbb{C} | 接線勾配テンソル, 接線係数 (物質座標系) |
| \mathbb{c} | 接線勾配テンソル, 接線係数 (空間座標系) |
| \mathbf{D} | 電束密度(electric flux density) |
| E | ヤング率 (縦弾性係数) (young's modulus) |
| \mathbf{E} | グリーン・ラグランジェひずみ (Green-Lagrange strain tensor) |
| \mathbf{E} | 電界 (の強さ) (electric filed) |
| f_i | 公称応力 (成分表記) |
| \mathbf{F} | 変形勾配テンソル (Deformation Gradient Tensor) |
| G | せん断剛性 (shear modulus) |
| \mathbf{H} | 磁場 (の強さ) (magnetic field (vector)) |
| \mathbf{H}_0 | 初期配置の磁場 (の強さ) (magnetic field (vector)) |
| \mathbf{H}_f | オイラー空間での磁場 (の強さ) (magnetic field (vector)) |
| \mathbf{H}_l | ラグランジェ空間での磁場 (の強さ) (magnetic field (vector)) |
| I_i | ひずみの不変量 (Invariants of strain) |
| \mathbf{I} | 2 階の単位テンソル |
| \mathbf{II} | 4 階の単位テンソル |
| J | ヤコビアン (体積変化) |
| k | ボルツマン定数 |
| K | 体積弾性率 (bulk modulus) |
| \mathbf{m} | 磁性粒子の磁気モーメント |
| \mathbf{M} | 磁化 (magnetization) |
| \mathbf{M}_0 | 初期配置の磁化 (magnetization) |
| \mathbf{M}_f | オイラー空間での磁化 (magnetization) |

| | |
|---------------------------|---|
| \mathbf{M}_l | ラグランジェ空間での磁化 (magnetization) |
| n | 分子鎖中の単分子の数 |
| N | 単位体積当たりの分子数の数 |
| p | 静水圧, 未定乗数 |
| \mathbf{P} | 公称応力テンソル (nominal stress tensor) 第1 ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル (first Piola-Kirchhoff stress tensor) |
| \mathbf{Q} | 回転を表す直交テンソル |
| \mathbf{S} | 第2 ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル (second Piola-Kirchhoff stress tensor) |
| t_i | 真応力 (成分表記) |
| \mathbf{T} | 真応力 (True stress : Cauchy stress tensor) 全真応力 (機械的な応力と磁場による応力テンソルの総和) |
| \mathbf{T}_{iso} | 等容変化項の応力 |
| \mathbf{T}_{vol} | 体積変化項の応力 |
| \mathbf{T}_m | マクスウェル応力 |
| U | 電磁エネルギー密度 |
| W | ひずみエネルギー関数 |
| W_{iso} | 等容性項のひずみエネルギー関数 |
| W_{vol} | 体積変化項のひずみエネルギー関数 |
| \mathbf{x} | 変形後 (現時刻 t) における物質点の位置ベクトル |
| \mathbf{X} | 変形前 (時刻 $t_0 = 0$) における物質点の位置ベクトル |
| ε | 一般的な総称としてのひずみ |
| θ | 絶対温度 |
| λ_i | 主伸長比 (principal stretch ratio) |
| μ | せん断剛性 (shear modulus) |
| μ | 透磁率 (Permeability) |
| μ_0 | 真空の透磁率 (Permeability in Vacuum) |
| ν | ポアソン比 (Poisson ratio) |
| σ | 一般的な総称としての応力 |
| χ | 写像関数 |
| Ψ | ひずみエネルギー関数 |
| Ψ_{iso} | 等容変化項のひずみエネルギー関数 |
| Ψ_{vol} | 体積変化項のひずみエネルギー関数 |
| Ψ_{mag} | 磁場の自由エネルギー関数 |
| Ψ_{mech} | 機械的な自由エネルギー関数 |
| Ω | 自由エネルギー関数 |

第1章 序論

1.1. 研究の位置づけ

エラストマーとは常温でゴム状弾性を有する高分子材料のことであり、大きく分けてゴム材料と熱可塑性エラストマーの二つに分けられる。ゴム材料のうちの一つである天然ゴムは、コロンブスによるアメリカ大陸発見後に南米で見いだされ、その後ヨーロッパに広まった。1800年代に始まったヨーロッパの産業革命の頃には、すでにゴム靴や防水コートのようなゴム製品が開発・使用されていた。そして1839年にチャールズ・グッドイヤーによって、硫黄を混ぜて加熱することにより、力を加えると良く伸び、力を除くと元の長さに戻る性質が見いだされた。この加硫という加工方法により、ゴム材料の非常に優れた特性が引き出され、タイヤなどの工業材料として急速に使用されるようになった。この巨大な変形をなしうるゴム材料は、液体と固体の両方の特性を持ち合わせており、本質的にエントロピー弾性として力学的に説明される [1]。ゴム材料は、巨大な建造物を支え地震の被害を最小限に抑える免震材料、ロケットや飛行機の燃料やオイル漏れを防止するシール材、あるいは人工血管などの医療用品として、数多くの分野で使用されており、現代社会では欠かすことのできない材料である。

これらの様々な分野において有効利用されているゴム材料は、単体で使用するよりも、いくつかの素材を組み合わせたり混合することによって、さらに優れた性質が引き出されている。このような組み合わせにより得られた材料を、複合材料や補強材料あるいは機能性材料と呼ぶ。ゴムに対する構造的な材料剛性の強化方法として、大きく分けると

①短繊維や長繊維を分散または配向させた繊維複合材料

②マトリックスの連続相に微粒子が不連続相として分散する粒子複合材料

の2種類がある。

①の繊維複合材料の一つとして、ゴム材料にナイロン短繊維を配合して圧延成型することにより、材料剛性を効率的に補強した材料がある。この繊維複合材料としてのゴム材料は、材料全体の剛性強化の他に、繊維方向への強い異方性を持つ材料として特徴付けられる。この繊維補強材料の工業的使用例として、伝動ベルトが挙げられる。

②の粒子複合材料の一つとして、ゴム材料に磁性粒子を混練させた磁性エラストマーがある。金属である磁性粒子を充填することにより、材料の構造的な剛性強化のみならず、その粒子複合材料に外部から磁場を与えることで、機械的特性を瞬時に変化させる磁性エラストマーが新しい機能性材料として脚光を浴び、実用化に向けて研究が進められている [2]-[12]。高分子材料であるエラストマーに磁性粒子を混練して成形された磁性エラストマーは、粒子複合材料であり、機能性材料として工業的に自動車・宇宙・医療産業などの様々な分野で応用され、今後ますますその利用価値は高まると考えられる。

本論文では、機能性エラストマーを使用した製品設計を最適化するための手法の一つとして、機能性エラストマーの機械的な挙動を解明するための数値解析理論を確立することを研究の位置づけとする。すなわち、①の繊維複合材料として、ナイロン短繊維を配合した異方性ゴム材料の数値解析手法を確立すること、そして、②の粒子複合材料として、ゴム材料に磁性粒子を含ませた磁性エラストマーの磁場中における機械的特性の変化を解明するための数値解析手法を確立することを研究の目的とする。

1.2. 誘電流体・磁性流体・磁性エラストマー

本節では、比較的新しい機能性エラストマーである磁性エラストマーについて、磁性流体ならびに誘電流体との比較を行いながら、その歴史と応用事例について述べる。

1960年代、NASA(米国航空宇宙局)は、月面に人類を送り込むべく有人ロケットの実現にその総力をあげて取り組んでいた。様々な先端技術の研究が進められ、解決しなければならない問題は多岐にわたったが、その中の1つに無重力状態における真空制御の問題がある。ロケットや宇宙船には、燃料系統は勿論のこと宇宙服に至るまで、大小さまざまなシーリングの問題が重要であり、たとえわずかな漏洩でも重大事故につながる危険を伴うので、この問題を解決するために、磁性流体が開発された。磁性流体は溶媒の中に界面活性剤を付着させた強磁性微粒子を懸濁させた複合物質であり、強磁性を示す液体として振舞う [13][14][15]。そして、その見かけの比重、表面張力、粘性や光学的異方性などが、加える磁場によって大きく変化することから、磁気粘性 (Magneto Rheological) 材料とも呼ぶ。通常、磁性粒子には鉄カルボニルから熱分解して得られる球状の鉄粒子が使われている。

一方、電界の印可によってそのレオロジー特性が変化する複合材料を電気粘性 (Electro Rheological) 材料と呼ぶ。電気粘性流体は誘電流体とも呼び、電気的に分極できる粒子を絶縁流体中に懸濁させることで実現される。なかでも、チタン酸バリウムやチタン酸ストロンチウムなどの強誘電体粒子は比較的誘電率が高く、良く使用されている。

これらの誘電流体および磁性流体のレオロジー特性は、印可された電界・磁界で懸濁液中に誘起された双極子によって大きく変化する。双極子は印可電界と平行方向に相互作用で互いに引きつけ合い、柱状構造を形成する。このような鎖状構造によって流体の流れが制限され、懸濁液の粘性が増大する。

典型的な誘電流体と磁性流体の一般的特性を表 1.1 にまとめた [16]。一般的にいずれもレオロジー特性に関してはほとんど同じである。しかし、磁性流体の方が誘電流体に比べて不純物による特性変化に影響を受けにくく、電流損やジュール熱によるエネルギー浪費が少ないという利点を持つ。印可磁場が大きくなるにつれて、流体中の鎖状構造を保つための機械的エネルギーが増加するため、流体の降伏応力や見かけの粘性は印可磁場の上昇に従って増加する。

このような磁性流体に配合されている磁性粒子が、固体的な特徴と流体的な特徴の両方の特性を持つエラストマーに配合されることにより、磁性エラストマーとして新しい機能が見いだされるようになった。磁性流体と同様に、磁場の印可によりそのレオロジー特性が大きく変化することがわかり、基礎的な研究のみならず工学的な応用方法の研究が進められている。

磁性エラストマーの力学的な特性の一例として、酸化鉄 (Fe_3O_4) を 40%程度含むシリコンエラストマーの貯蔵弾性率と損失弾性率の磁場依存性を図 1.1 および図 1.2 に示す [2]。2Hzの正弦波によるひずみを受けるこのエラストマーは印可磁場によって大きく弾性率が変化する。ひずみ振幅の最大値が 0.03 である結果を●で、0.05 の結果を▲、0.12 の結果を■で示す。これらの弾性率はエラストマー中の粒子の並び具合によって変化することがわかっている。

表 1.1 誘電流体と磁性流体の一般特性

| 特性 | 誘電流体 | 磁性流体 |
|-----------|-----------------------------------|--------------------------|
| 最大降伏強度 | 2～5(kPa) | 50～100(kPa) |
| 最大電界／磁界 | 4(kV/mm) | 250(kA/m) |
| 塑性粘度 | 0.1～1.0(Pas) | 0.1～1.0(Pas) |
| 温度範囲 | +10～90(°C)(DC) -10～125(°C)(AC) | -40～150(°C) |
| 応答時間 | 1～2 (ms) | 1～2 (ms) |
| 密度 | 1～2(g/cm ³) | 3～4(g/cm ³) |
| 最大エネルギー密度 | 0.001(J/ cm ³) | 0.1(J/ cm ³) |
| 電源 | 2～5(kV)/ 1～10(mA) | 2～25(kV)/ 1～2(mA) |
| 不純物感度 | 敏感 | 鈍感 |

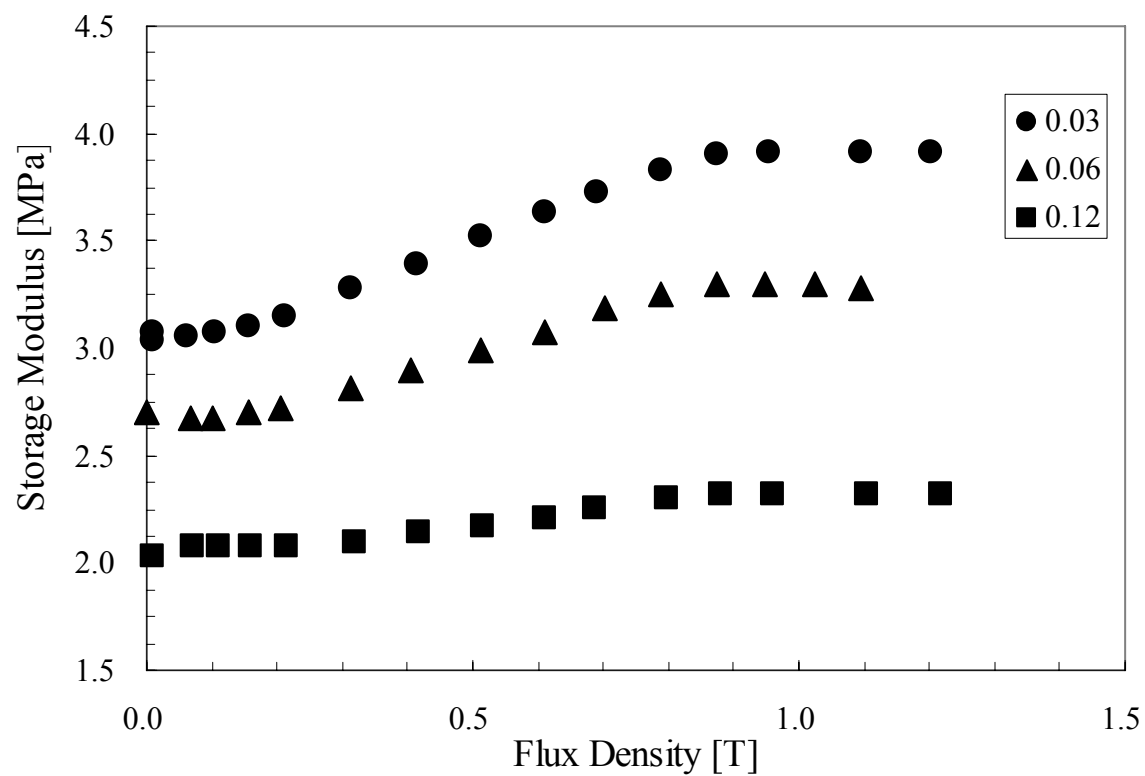


図 1.1 貯蔵弾性率

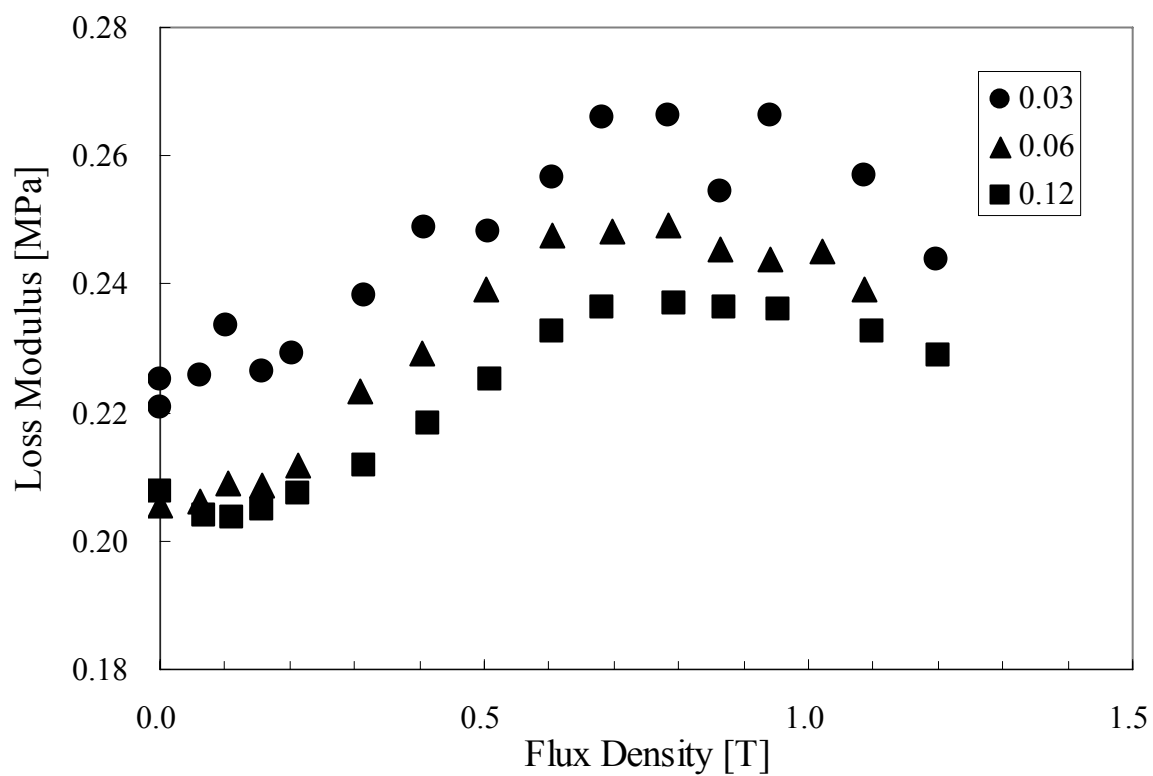


図 1.2 損失弾性率

自動車部品において、固体として扱われる磁性エラストマーの使用例を図 1.3 に示す [2]。自動車のサスペンションブッシュは一般的に内筒と外筒の間にゴムが装着され、軸方向または半径方向の挙動を制御する目的で使用される。図で示したサスペンションブッシュはゴム部分が通常のゴムではなく、磁性粒子を含有した磁性エラストマーとして機能している。内筒とゴムの間には多重に巻かれたワイヤコイルが配置されており、そのコイルに電流を印可することで磁場を形成する。磁場変化による剛性変化は瞬時に行われるので、外部からの振動などを瞬時に吸収できるよう制御される。図 1.4 に印可電流と半径方向の剛性変化を■，軸方向の剛性変化を●で示す。印可電流に対して剛性が線形に増加していることが示されている [2]。

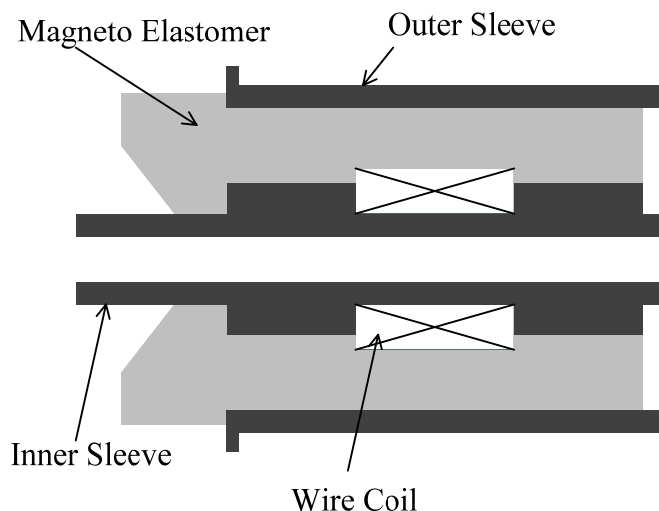


図 1.3 オートモーティブサスペンションブッシュ

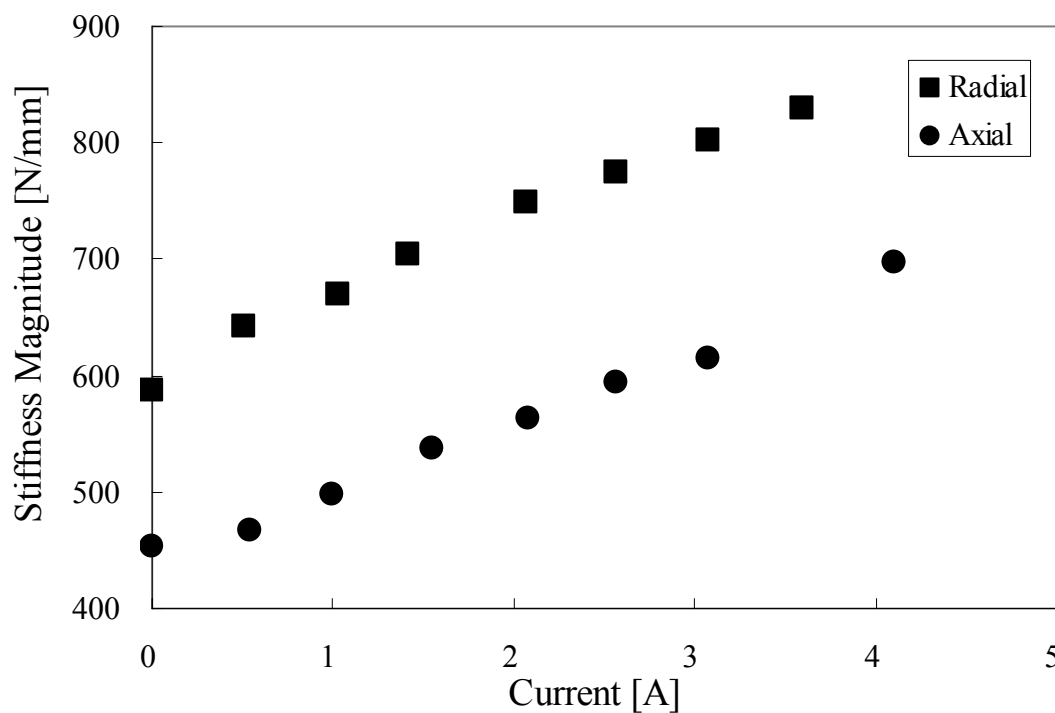


図 1.4 印可電流に対する剛性変化

1.3. 従来の研究

異方性特性を持つ繊維複合材料と磁場中での機械的特性が変化する磁性粒子複合材料の機能性エラストマーの数値解析理論を確立するにあたり、従来のエラストマーの数値解析法と磁性エラストマーの数値解析について述べる。

1.3.1. 超弾性体のひずみエネルギー関数

ゴムやエラストマーは工業上その特性の良さから、タイヤ・伝動ベルト・生体材料など様々な分野で大変広く使用されている [17]。これらの使用条件において、ゴム材料は次のような特徴を持つ。

- 1) 応力-ひずみ関係が強い非線形性を有する。
- 2) 微小ひずみから大ひずみ領域まで利用される。
- 3) 非圧縮の条件が保たれる。

これらの特徴を持つゴム材料の特性を解明するための手法として有限要素法による数値解析があり、有限要素法解析では、ゴム材料やエラストマーは超弾性体として取り扱われている。Fung[18]によれば超弾性体の定義として、“ある物体が単位質量当りのひずみエネルギー関数 W を持ち、それが均質な応力のない自然状態について、単位質量当りのひずみエネルギーの変化の割合が、応力により仕事をする割合に等しいように作られたひずみテンソルの解析関数であるとき、その物体を超弾性(hyperelastic)体という”とある。別の言い方ではひずみエネルギー関数 W の存在があり、それをひずみで微分することにより弾性体の応力が得られる材料ともいえる。超弾性体の構成則には半世紀以上に渡り、多くの研究がなされてきた。通常、ひずみエネルギー関数 W の変数には伸長比 λ_i またはひずみの不変量 I_i が使用される。図 1.5 に示すような単位ブロックにおいて、変形前を破線で示し、変形後を実線で示したとき、主軸方向の元の長さを L_1, L_2, L_3 とし、各方向の変位を u_1, u_2, u_3 としたとき、主伸長比 λ_i は

$$\lambda_i = \frac{L_i + u_i}{L_i} \quad (1.1)$$

で定義される。また、伸長比から次のひずみの不変量 I_i が定義される。

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (1.2)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (1.3)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (1.4)$$

これらのひずみの不変量の物理的な意味として、 I_1 は長さ方向の変化量、 I_2 は表面積の変化量、 I_3 は体積変化量を表す。

また、非圧縮性材料を取り扱うためにひずみエネルギー関数 W は式(1.5)に示すように体積変化項のひずみエネルギー関数 W_{vol} と等容性項のひずみエネルギー関数 W_{iso} の 2 つに加算分解することにより、それぞれのひずみエネルギー関数を定義することができる。この手法を用いることにより、有限要素法解析での要素の定式化を効率よく行うことができる。

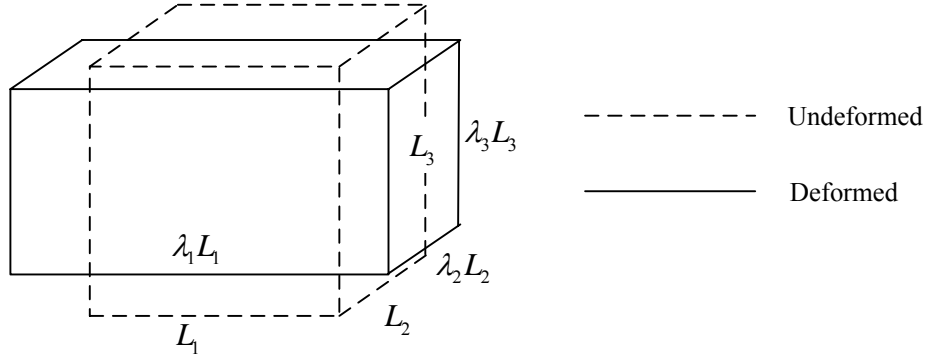


図 1.5 単位ブロック

$$W = W_{\text{vol}} + W_{\text{iso}} \quad (1.5)$$

まず，体積変化項に関するひずみエネルギー関数 W_{vol} の具体的な型とそれぞれの特徴について論ずる．体積変化に関するひずみエネルギー関数は体積変化率 $J = \sqrt{I_3}$ を変数として持つ．ここで，体積変化項のひずみエネルギー関数を $W_{\text{vol}}(J)$ とする連続体の物体が，外力を受けて変形する状態を考える．連続体は単位長さを持つ立方体として，その連続体が静水圧のみによって変形を受ける状態とすると，一辺あたりの変化量は $J^{1/3}$ となる．この状態に置いて，微小ひずみ理論を満足し物理的な整合性を取るためには，体積変化率がゼロから無限大 ($J \in (0, +\infty)$) のすべての領域において，次の3つの条件が満たされなければならない．

1) 微小ひずみ理論より

$$W_{\text{vol}}(1) = 0, \quad p(1) = \frac{\partial W_{\text{vol}}(1)}{\partial J} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(1)}{\partial J^2} = K \quad (1.6)$$

ここで K は体積弾性率である．

2) 物理的な整合性より，体積がゼロまたは無限大となるためには，ひずみエネルギー関数は無限大となる．

$$J \rightarrow 0 \text{ または } J \rightarrow \infty \text{ のとき } W_{\text{vol}}(J) \rightarrow \infty$$

3) 静水圧 $p(J) = \frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial J}$ は J の変化 $(0, +\infty)$ に対して，単調変化を取る．

$$J \rightarrow 0 \text{ のとき } p(J) \rightarrow 0$$

$$J \rightarrow \infty \text{ のとき } p(J) \rightarrow \infty$$

これらの条件を満足するために，様々なひずみエネルギー関数 W_{vol} の形式が提案されており，以下にその代表的な5つの関数 W_{vol} について，モデル1～5としてまとめる．

- モデル 1

最もよく使われており、最も簡単な形式として次式のひずみエネルギー関数として、

$$W_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{2} K (J-1)^2 \quad (1.7)$$

がある。式 (1.7) を体積変化率で微分することで得られる静水圧は、体積変化率に対して線形となる。

$$\frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial J} = p(J) = K(J-1) \quad (1.8)$$

また、体積変化率による 2 階微分は

$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(J)}{\partial J^2} = K \quad (1.9)$$

である。式 (1.7) による体積変化項のひずみエネルギー関数は微小ひずみ理論を満足する。しかし、 $J \rightarrow 0$ のときひずみエネルギー $W_{\text{vol}}(J)$ は $1/2K$ となり、静水圧 $p(J)$ は $-K$ となる。従って物理的な整合性を緩やかに満たすにとどまるので、大きな圧縮場が発生する場合には式 (1.7) を用いるには注意が必要である。

- モデル 2

別の単純なモデルとして、次式の対数ひずみの二乗を用いたひずみエネルギー関数、

$$W_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{2} K (\ln J)^2 \quad (1.10)$$

が提案されている [19]。このモデルでは、体積変化率による 1 階および 2 階微分は

$$\frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial J} = p(J) = K \frac{\ln J}{J} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(J)}{\partial J^2} = K \frac{1 - \ln J}{J^2} \quad (1.12)$$

である。このエネルギー関数においても明らかに微小ひずみ理論を満足しているが、体積が膨張する場合 ($J \rightarrow \infty$) に静水圧はゼロとなるので、物理的な整合性を満たさない。

- モデル 3

モデル 1 とモデル 2 を混合したモデルとして次式、

$$W_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{2} K \left[(J-1)^2 + (\ln J)^2 \right] \quad (1.13)$$

で提案されている [20]。体積変化率による 1 階および 2 階微分は

$$\frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial J} = p(J) = K \left(\frac{\ln J}{J} + J - 1 \right) \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(J)}{\partial J^2} = K \frac{1 - \ln J + J^2}{J^2} \quad (1.15)$$

である。このエネルギー関数においてはすべてのひずみ領域において微小ひずみ理論と物理的整合性を満足する。しかし、体積変化がない場合、

$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(1)}{\partial J^2} = 2K \quad (1.16)$$

となり，せん断剛性が2倍の評価となる．これに対して単純な修正モデルとして

$$W_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{4} K \left[(J-1)^2 + (\ln J)^2 \right] \quad (1.17)$$

とすれば，すべての条件を満たす．

- モデル 4

Ogden は変数を一つ追加したひずみエネルギー関数として，

$$W_{\text{vol}}(J) = K \frac{J^{-\beta} - 1 + \beta \ln J}{\beta^2} \quad (1.18)$$

を提案した [21].

体積変化率による1階および2階微分は

$$\frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial J} = p(J) = K \frac{1 - J^{-\beta}}{\beta J} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(J)}{\partial J^2} = K \frac{(\beta+1)J^{-\beta} - 1}{\beta J^2} \quad (1.20)$$

である．このひずみエネルギー関数においても微小ひずみ理論を満足しているが， $J \rightarrow \infty$ のとき $p(J) \rightarrow 0$ となり，物理的整合性が乱される．

- モデル 5

モデル 4 の Ogden のひずみエネルギー関数において $\beta = -2$ とした，ひずみエネルギー関数，

$$W_{\text{vol}}(J) = K \left[\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J \right] \quad (1.21)$$

が提案されている [22].

体積変化率による1階および2階微分は

$$\frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial J} = p(J) = K \left(J - \frac{1}{J} \right) \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(J)}{\partial J^2} = K \left(1 + \frac{1}{J^2} \right) \quad (1.23)$$

である．このエネルギー関数においてはすべてのひずみ領域において微小ひずみ理論と物理的整合性を満足する．しかし，体積変化がない場合，

$$\frac{\partial^2 W_{\text{vol}}(1)}{\partial J^2} = 2K \quad (1.24)$$

となり，せん断剛性が2倍の評価となる．単純な修正モデルとして

$$W_{\text{vol}}(J) = \frac{1}{2} K \left[\frac{1}{2} (J^2 - 1) - \ln J \right] \quad (1.25)$$

とすれば，すべての条件を満たす．

以上、現在の有限要素法で用いられている体積変化に対するひずみエネルギー関数の代表例を示した。いずれの形式においてもほぼ非圧縮 ($J \approx 1$) の機械的挙動を数学的に適用可能である。しかし、大きな体積変化が発生する場合には膨張と収縮の状態に応じて、適切なひずみエネルギー関数を用いる必要がある。

次に、等容性項のひずみエネルギー関数 W_{iso} に関して、代表的なひずみエネルギー関数を以下に示す。

- Neo-Hooke モデル

最初、熱力学を基本としてガウス鎖分子理論を用いて、Neo-Hooke則が考案された [23]。Neo-Hooke則のひずみエネルギー関数は主伸長比 λ_i を用いて、

$$W_{\text{iso}} = \frac{1}{2} Nk\theta (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (1.26)$$

となる。ここで、 N は単位体積当たりの分子鎖の数を示し、 k はボルツマン定数、 θ は絶対温度であり、 N, k, θ の三変数の積はせん断剛性 G を示し、Neo-Hooke 則の材料物性値である。

$$G = Nk\theta \quad (1.27)$$

Neo-Hooke 則は材料のせん断剛性から超弾性体のひずみエネルギー関数を同定できるので、最も単純であり、安定した数値計算を行え、基礎的なモデルとして利用される。ただし、ガウス分布理論から導出されているので、伸長比が 1.3 を超えると実在ゴムの挙動には合わなくなり、大ひずみ領域での計算では不向きとなる。Neo-Hooke 則はひずみの不変量 I_1 を用いて

$$W_{\text{iso}} = C_{10} (I_1 - 3) \quad (1.28)$$

と記述される場合もある。

- Mooney-Rivlin モデル

次に、現象論的なモデルとして Mooney-Rivlin モデル [24] が考案された。伸長比 λ_i を用いて Mooney-Rivlin モデルのひずみエネルギー関数 W は

$$W_{\text{iso}} = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 (1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + 1/\lambda_3^2 - 3) \quad (1.29)$$

となる。このモデルは次の二つの仮定の下に考案されている。

- 1) 材料は非圧縮であり、等方性である。
- 2) せん断変形に対して線形である。

従って、Mooney-Rivlin モデルを使用した数値解析では、単純せん断変形下では応力とひずみの関係は線形となる。このモデルでは単軸伸長での 400% を超える高ひずみ領域での実在ゴムの応力の立ち上がりを表現するのは困難である。また、 C_2 を定数ではなく、ひずみによって変化する値であるとするモデルやカーボンブラック等による補強の効果を追加したモデル等も考案されている。 C_2 がゼロの場合は Neo-Hooke 則と等価となる。材料は非圧縮の仮定が取られているので、ひずみの不変量を用いて

$$W_{\text{iso}} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (1.30)$$

とも表記される。

- Ogden モデル

現象論的な取り扱いを更に厳密にモデル化したOgdenモデル [25]が考案された。

$$W_{\text{iso}} = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (1.31)$$

Ogdenモデルは，“ひずみエネルギー関数は各主伸長比でのひずみエネルギーの総和である”，という Valanis-Landel[26]の仮定を元に，より数学的なアプローチから考案されており，近似精度が優れているのが特徴である．次数 N を増やすことで精度を上げることができるが，数値計算において座屈挙動が発生する場合がある．一般に次数 N は 3 または 4 が適切である． μ_n と α_n が材料物性値であり， μ_n は応力と同じ単位であり， α_n は無次元数である．二つの変数の積の総和がせん断剛性を示す．

$$G = \sum_{n=1}^N \mu_n \alpha_n \quad (1.32)$$

- Gent モデル

分子構造に着目し，非ガウス鎖分子理論を用いた形式のGentモデル [27]が単軸試験からのモデル化が容易である利点もあり，最近では良く使用されている．Gentモデルを式(1.33)に示す．

$$W_{\text{iso}} = -\frac{E}{6} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \quad (1.33)$$

E と J_m が材料物性値であり， E は応力と同じ単位でありヤング率である． J_m は無次元数であり，分子鎖の伸びきり長さを表す．Gent モデルは Neo-Hooke 則を拡張したひずみエネルギー関数であり，式が簡単であり，2 個の材料物性値で高ひずみ領域まで近似できる．

- Arruda-Boyce モデル

式(1.34)に示すArruda-Boyceモデル [28]はGentモデルと同様に分子構造に着目し，非ガウス鎖分子理論を用いた形式である．8 個の分子鎖が連続体中の立方体を表現する仮説を取っているため，8 鎖モデルとも呼ぶ．

$$W_{\text{iso}} = Nk\theta \left[\frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20n}(I_1^2 - 9) + \frac{1}{1050n^2}(I_1^3 - 27) + \frac{19}{7000n^3}(I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750n^4}(I_1^5 - 243) + \dots \right] \quad (1.34)$$

上式において， $Nk\theta$ は Neo-Hooke 則と同様に，せん断剛性を表す． n は無次元数であり，統計理論における単分子の数を表す．Gent モデルも Arruda-Boyce モデルも単軸試験のみから材料物性値を同定できる点が実用上有利であるが，多軸場での挙動が実在ゴムと合わない場合があるので，注意を要する．

これらの等容性項のひずみエネルギー関数 W_{iso} は、等方性の仮定の下に導出されており、構成則が汎用有限要素法プログラムに組み込まれている。現在の汎用有限要素法ではエラストマーなどのゴム材料は等方性の仮定の下に超弾性体として数値計算が行われているが、実現象として異方性を持つ超弾性体の数値計算の必要性が増している。例えば、自然界に目を向けるとは哺乳類の心筋細胞は、非圧縮性であり非線形弾性挙動を取るが、細胞骨格の配向方向に強い剛性を持つ異方性材料である。また、産業界に目を向けると工業用の伝動ベルトなどはベルトの幅方向に強い圧縮力を受けるので、母剤のゴム材料にナイロン短繊維を配合して成形されている繊維複合材料として機能している。このベルトの繊維複合材料は、繊維配向方向に強い剛性を持ち、さらに引張と圧縮の剛性が大きく異なる非線形材料として使用されている。このような異方性を持つ材料特性の場合、異方性超弾性構成則を適用し、異方性超弾性構成則に対応したひずみエネルギー関数を用いなければ、本質的な特性を得ることができないので、異方性超弾性体構成則の整備と実現象を評価できる異方性のひずみエネルギー関数を必要とする。

1.3.2. 磁性エラストマーの数値解析

磁性エラストマーの磁気的および機械的挙動を数値解析する研究がこれまでに行われてきた。Jollyら [3]は 図 1.6 に示すような磁性粒子中の磁性粒子の粒子間距離 r_0 と粒子間の変位 x および双極子モーメント \mathbf{m} から次式の磁気エネルギー E を算出した。

$$E = \frac{|\mathbf{m}|^2 \left(1 - 3 \frac{r_0^2}{r_0^2 + x^2} \right)}{4\pi\mu_1\mu_0 (r_0^2 + x^2)^{3/2}} \quad (1.35)$$

ここで、 μ_1 は磁性粒子の透磁率であり、 μ_0 は真空の透磁率である。そして、その磁気エネルギーをひずみで 2 階微分することで次式のせん断剛性を算出している。

$$G \simeq \frac{\phi J_p^2}{2\mu_1\mu_0 h^3} \quad (1.36)$$

ここで、 ϕ は磁性粒子の体積比率であり、 h は粒子間距離 r_0 を磁性粒子の粒径 d で割った比率である。 J_p は平均粒子分極であり、粒子中の磁気飽和率 α と外部磁束密度 B および飽和分極 J_s から

$$J_p = \frac{3/2 \alpha^3 B + (1 - \alpha^3) J_s}{1 + 3/2 \phi \alpha^3} \quad (1.37)$$

となる。さらに、外部磁場が変化することにより剛性がどのように変化するかを求める実験は、ほとんど明かでなかったが、図 1.7 に示すような磁性エラストマーのせん断試験を行い、外部磁場を変化させることでせん断剛性変化を計測している。黒色で示す磁性エラストマーの試験片は $20\text{mm} \times 7.5\text{mm} \times 1.0\text{mm}$ の大きさであり、中央と外側の非磁性板で挟まれて、二重に配置されている。図 1.7 に示す様に垂直方向の磁束密度を変化させて、1%のひずみを得られるように中央と外側の平板にせん断荷重が与えられ、せん断剛性が測定されている。母材はシリコンゴムであり直

径が $3\sim 4\ \mu\text{m}$ の磁性粒子（カルボニルアイアン：Fe）が 10, 20 および 30% の体積比で混入された試験片が用いられている．外部磁場を変化させて測定されたせん断剛性の変化量を 図 1.8 に示す．図中で□が 30% の体積比を，◆が 20% の体積比を，△が 10% の体積比の試験片のせん断剛性変化量を示す．このせん断剛性変化は 1% のせん断ひずみを与えた状態で計測された．彼らの理論解では磁場の方向と大きさが，連続体中で常に均一であるという仮定の下で導出されており，極めて微少なひずみの範囲でしか適用できない．すなわち大変形下における実構造物の大ひずみ領域には適用しがたい．また，連続体中での磁束密度ベクトルの向きが一様でない構造物に対する応答を求めることはできない．

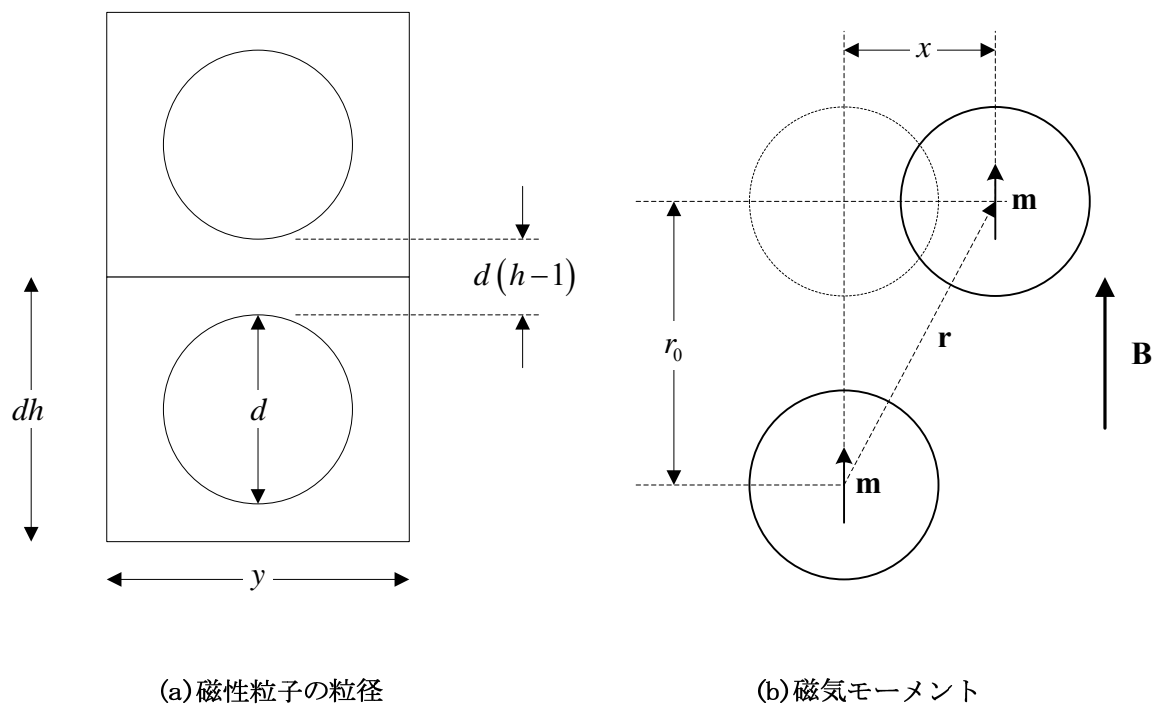


図 1.6 磁性粒子の粒径と磁気モーメント

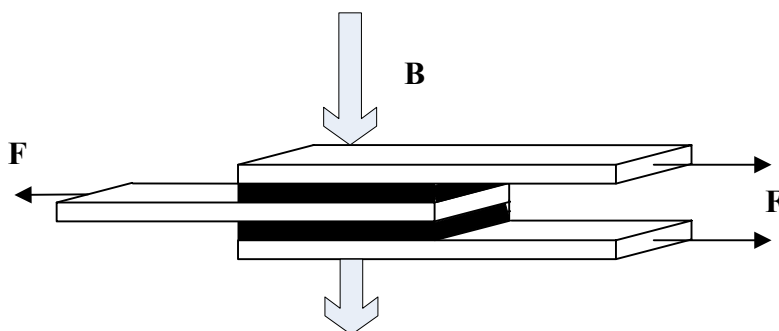


図 1.7 せん断試験

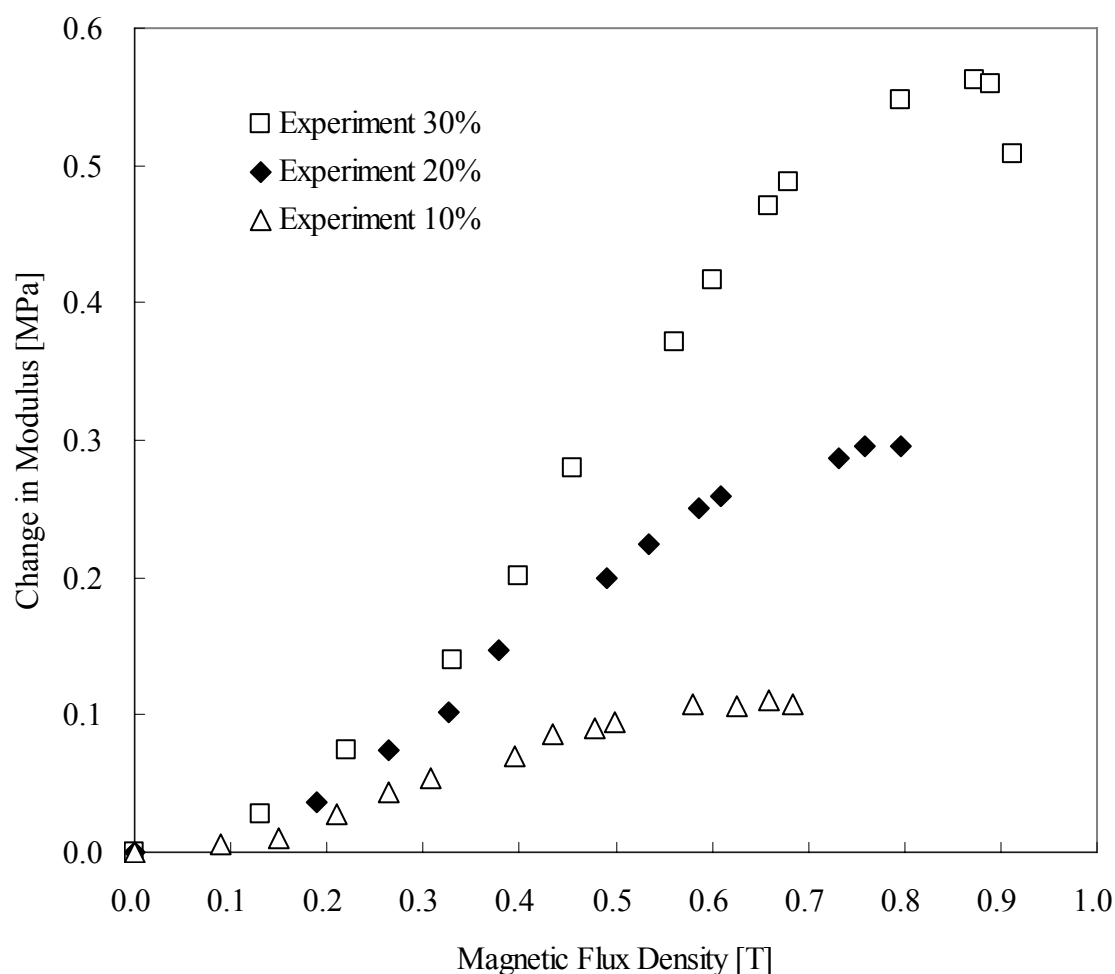


図 1.8 外部磁場に対するせん断剛性変化量

一方、磁性エラストマーを連続体として捉えることにより、その応力解をひずみエネルギー関数から算出する手法が従来の研究に見られる。BrigadnovとDorfmann[29]は磁束密度を変数とした磁性エラストマーの数学的モデルを提案し、平板に均一な外部磁場が与えられたときの応力解を求めた。KankanalaとTriantafyllidis[30]は磁化 M を変数とした磁性エラストマーのひずみエネルギー関数を用いて応力の解析解を導出した。Steigmann[31]は磁場 H を変数とした磁性エラストマーのひずみエネルギー関数を用いて応力の解析解を導出した。DorfmannとOgden[32]は磁束密度 B と磁場 H のそれぞれを変数としたひずみエネルギー関数を導出し、厚肉円筒の理論解を満足するための一般解を見いだした。これらの研究においては、平板や厚肉円筒などの単純な形状において、均質な磁場中でのひずみエネルギー関数を提案し、応力テンソルを導出したものであり、陰解法有限要素法解析において必要な接線剛性の導出はなされていない。また、実験との比較も行われておらず、材料物性値の同定手法も確立されていないため、実用として用いることは困難である。

1.4. 本研究の目的と構成

本研究の目的は、機能性エラストマーの変形下における応力とひずみを評価するための数値解析理論の確立を行うことである。その数値解析理論の一つとして、等方性の仮定の下で行われてきた超弾性体の有限要素法の数値解析理論に、異方性配向方向ベクトルによる異方性構造テンソルを構成則に組み込み、超弾性繊維複合材料を連続体として取り扱うための拡張を行う。さらに、磁束密度ベクトルによる磁場構造テンソルを構成則に組み込み、外部磁場に依存する磁性エラストマーの機械的剛性変化を取り扱うための拡張を行う。そして、磁性エラストマーの超弾性体構成則を用いて、磁場解析と応力解析との連成問題を高精度、高速、かつ安定に解くための方法の確立を行う。

このため、本論文では、第2章と第3章で一方向に配向強化された横等方性材料について超弾性構成則の支配方程式を導出し、異方性を持つ工業材料の応力解析を行うためのひずみエネルギー関数を定式化し、その材料物性値の同定手法を確立する。そして、第4章と第5章では、磁性エラストマーの超弾性構成則を導出し、その構成則が異方性超弾性体の構成則と等価であることを示し、外部磁場が変化することで機械的剛性が変化する材料のひずみエネルギー関数を定式化し、その材料物性値の同定手法を確立する。さらに第6章では、磁性エラストマーを使用した実用的な工業部品における磁場変化による機械的応答を数値実験で求め、その数値解析のための磁場応力連成解析手法の確立を行う。

各章の内容は以下の通りである。

第1章では本論文の研究の位置づけ、既存の超弾性体の数値解析手法とその問題点、および論文概要について述べている。

第2章では、エラストマーを繊維複合材料として数値解析で取り扱うために、繊維配向ベクトルで構成される構造テンソルを構成則に組み込む。ここでは、異方性エラストマーを非圧縮性の超弾性体として取り扱うために、ひずみエネルギー関数を体積変化項と等容変化項に加算分解する手法を導入する。超弾性体材料における変形挙動は、その等容変化項の応力テンソル及び接線剛性マトリックスが支配的となるので、その等容変化項に配向強化された構造テンソルを組み込むことにより、異方性超弾性体の応力テンソル及び接線剛性マトリックスを導出する。

第3章では、複合材料として繊維強化された工業用ゴム材料のための、ひずみエネルギー関数の導出を行い、従来の研究では明かではなかった材料物性値の同定手法を確立する。異方性の材料物性値を同定するためには、応力理論解が必要となるので、その理論展開を行う。そして、実使用されている工業用ゴム材料の材料試験を行い、得られた応力-ひずみ線図から材料物性値の同定を行い、有限要素法による数値解析を行い、得られた数値計算結果と実験値を比較し、ひずみエネルギー関数の精度について検証する。さらに、より実用的な変形モードでの実験及び数値解析を行い、導出した異方性超弾性体の材料構成則とひずみエネルギー関数および材料物性値が妥当であることを実証する。

第4章では、磁性エラストマーの超弾性構成則を確立するために、磁場の平衡方程式から応力テンソルには機械的な応力テンソルに加えてマクスウェル応力が必要であることを示し、ひずみエネルギー関数を機械的なひずみエネルギー関数と磁場的なひずみエネルギー関数に加算分解する手法を適用する。その磁場的なひずみエネルギー関数には磁束密度ベクトルによる磁場構造テンソルが必要であり、磁束密度ベクトルによる不変量がひずみエネルギー関数の変数として必要

であることを導く．そして，その磁場構造テンソルは第 2 章の異方性超弾性体で使用される，異方性の繊維配向ベクトルから得られる構造テンソルと等価であることを示し，異方性超弾性体の構成則を修正することにより，磁性エラストマーの超弾性構成則を導出する．

第 5 章では，磁性エラストマーのひずみエネルギー関数を導出し，その材料物性値の同定手法の確立を行う．その検証のために，PDMS に磁性粒子を含有させた試験片の作製方法について述べ，作製した試験片を用いて外部磁場を与えた状態で大ひずみの領域まで含めた純せん断試験を行い，磁性粒子の体積密度と外部磁場の強さが異なる複数の試験状態での応力-ひずみ関係を計測する．そして，本研究で確立した物性値の同定手法を用いて，それぞれの応力-ひずみ曲線から各体積密度の試験片での材料物性値を同定し，有限要素法解析プログラムにひずみエネルギー関数を組み込み，せん断挙動を模擬する解析を行い，得られた数値計算結果と実験との比較を行い，本研究が適切であることを検証する．さらに，変位が一定の下で外部磁場を変化させて計測されたせん断剛性変化の実測値を用いて，本研究のひずみエネルギー関数の材料物性値を同定し，その実験を模擬する数値実験を行い，得られた数値計算結果と実測値の比較を行うことで，本研究の妥当性を確認する．

第 6 章では，既存の研究では見あたらない磁束密度勾配を考慮したひずみエネルギー関数の導出を行い，磁場応力連成解析の手法を示し，自動車サスペンションブッシュに用いられている磁性エラストマーの外部磁場変化による剛性変化を捉えるための数値実験を行う．数値実験では，静磁場解析を行うと共に，仮想的な磁束密度ベクトルを与えて，様々な磁束密度勾配の下での構造物の機械的応答を数値計算で求め，その結果について考察すると共に本研究の有効性について論じる．

第 7 章では，第 2 章から第 6 章において得た本研究の成果について総括を行い，本研究で提案した機能性エラストマーの数値解析理論による応力解析手法の有効性と工業的な利用の可能性について論じ，本論文の結論としている．

第2章 異方性超弾性構成則

2.1. 超弾性体

ゴムやエラストマーは工業上その特性の良さから、タイヤ・伝動ベルト・生体材料など様々な分野で大変広く使用されている [17]. これらの使用条件において、ゴム材料は次のような特徴を持つ.

- 応力-ひずみ関係が強い非線形性を有する.
- 微小ひずみから大ひずみ領域において利用される.
- 非圧縮の条件が保たれる.

これらの特徴を持つゴム材料は、超弾性体として有限要素法解析にて取り扱われる. Fung[18]によれば超弾性体の定義として、“ある物体が単位質量当りのひずみエネルギー関数 W を持ち、それが均質な応力のない自然状態について、単位質量当りのひずみエネルギーの変化の割合が、応力により仕事をする割合に等しいように作られたひずみテンソルの解析関数であるとき、その物体を超弾性(hyperelastic)体という”とある. 別の言い方ではひずみエネルギー関数の存在があり、それをひずみで微分することにより弾性体の応力が得られる材料ともいえる. 超弾性体の構成則には半世紀以上に渡り、多くの研究がなされてきた. 最初、熱力学を基本としてガウス鎖分子理論を用いてNeo-Hooke則 [23]が考案された、その後、数学的な手法からひずみの主不変量に基づくモデルとしてMooney-Rivlinモデル [24]や、伸長比に基づくモデルとしてOgdenモデル [25]などが考案された. その他のモデルとしては分子構造に着目し、非ガウス鎖分子理論を用いた形式のGentモデル [27]やArruda-Boyceモデル [28]などが単軸試験からのモデル化が容易である利点もあり、最近では良く使用されている. また、管模型モデル [33]を組み込んだMicro-Sphereモデル [34]などの最新理論による材料構成則が開発されており、化学と工学の融合が進んでいる.

これらのモデルは多くの場合、非圧縮性であり、等方性の仮定の上で構成則が汎用有限要素法プログラムに組み込まれている. 現在の汎用有限要素法では等方性の仮定の下に超弾性体の数値計算が行われているが、実現象として異方性を持つ超弾性体の数値計算の必要性が増している. 例えば、自然界に目を向けるとほ乳類の心筋細胞は非圧縮性であり非線形弾性挙動を取るが、細胞骨格の配向方向に強い剛性を持つ [35][36]. また、工業用の伝動ベルトなどはベルトの幅方向に強い圧縮力を受けるので、母剤のゴム材料にナイロン短繊維を配合して成形されている複合材料として機能している. これらのような異方性を持つ材料特性の場合、異方性超弾性構成則を適用し、異方性超弾性構成則に対応したひずみエネルギー関数を用いなければ、本質的な特性を得ることができない. この異方性超弾性体のひずみエネルギー関数には、配向ベクトルから得られる構造テンソルが必要となる. この構造テンソルは配向ベクトルの方向のみが必要であり、その大きさには依存しない. なお、磁性エラストマーのように外部磁場に依存して機械的剛性が変化するような機能性材料を超弾性体として取り扱う場合、そのひずみエネルギー関数には磁束密度ベクトルから算出される磁場構造テンソルが必要となる. この磁場構造テンソルは異方性超弾性体のひずみエネルギー関数で使用する構造テンソルと等価であり、磁束密度ベクトルの大きさにも依存する.

このため、本章では、異方性超弾性構成則の応力テンソルを明らかにし、陰解法による非線形有限要素法解析に必須である接線剛性マトリックスを陽な形で示す. この接線剛性マトリックス

の導出の過程では、超弾性体を連続体として捉えたときの連続体の変形テンソルおよび横等方性材料を定義し、超弾性体の応力を導出する。そして、ゴム材料は概ね非圧縮の状態が保たれるので、非圧縮を考慮したときのひずみエネルギー関数の加算分解法について論じ、非圧縮性材料での応力テンソルを展開し、最終的に有限要素法解析で適用するための接線勾配テンソルを導出する。

2.2. 異方性超弾性体の構成則の導出

連続体中にある物質の変形テンソルを定義するために、図 2.1 に示すような変形前後の物質点での運動状態を考える。 \mathbf{X} を参照座標系でのある物質点の位置ベクトルとする。外力による変形に伴う現座標系での位置ベクトルを \mathbf{x} とすると

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

と表される。ここで、 $\boldsymbol{\chi}$ は変形前後の位置ベクトルを関係づける写像関数である。これは線形写像であるので、 $\boldsymbol{\chi}$ は2階のテンソルである。

変形勾配テンソル \mathbf{F} は写像関数の勾配演算を行い、

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.2)$$

と表記され、 \mathbf{F} は2階のテンソルである。変形勾配テンソル \mathbf{F} の行列式は材料の体積変化（ヤコビアン） $J(\mathbf{X})$ を表し、

$$J(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{F}(\mathbf{X})) > 0 \quad (2.3)$$

の条件を満たす必要がある。

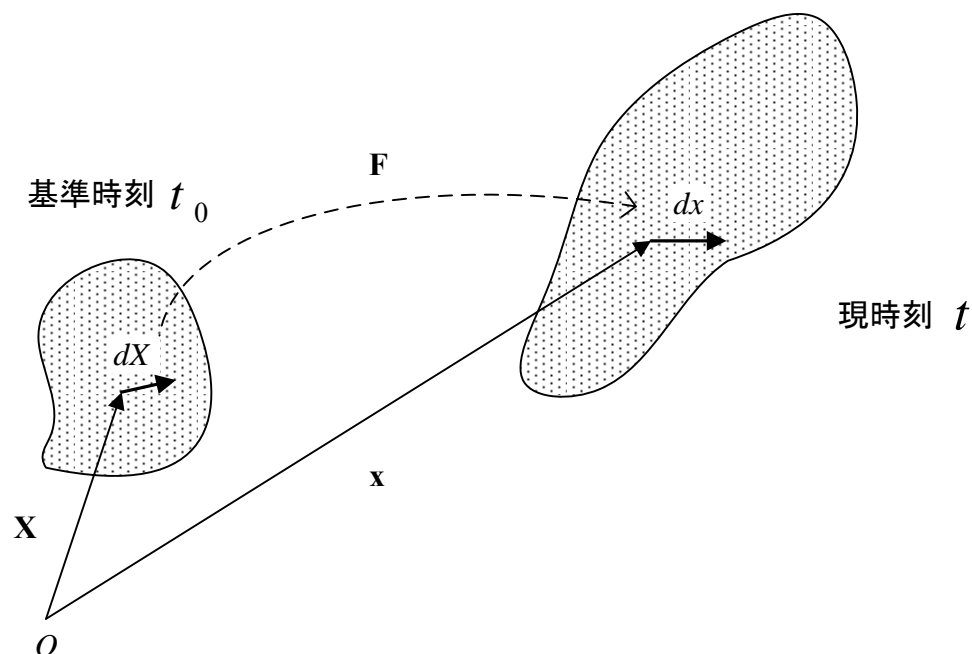


図 2.1 物質点の運動と変形勾配テンソル

変形勾配テンソル \mathbf{F} を用いて、右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} と左コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{b} は次のように定義される。

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.5)$$

右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} と左コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{b} を用いてグリーン・ラグランジェひずみ \mathbf{E} とアルマンジひずみ \mathbf{A} は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.7)$$

である。ここで \mathbf{I} は 2 階の単位テンソルである。

右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} とコーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{b} の主不変量は次式となる。

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C} = \text{tr} \mathbf{b} \quad (2.8)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{C} \text{tr} \mathbf{C} - \text{tr} \mathbf{C}^2) = \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{b} \text{tr} \mathbf{b} - \text{tr} \mathbf{b}^2) \quad (2.9)$$

$$I_3 = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{b} \quad (2.10)$$

これらは座標変換に無関係なので、ひずみの不変量と呼ぶ。

図 2.2 に示す主伸長比 λ_i を用いれば、主不変量は

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.11)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (2.12)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (2.13)$$

であり、物理的な意味として I_1 は長さ方向の変化量、 I_2 は表面積の変化量、 I_3 は体積変化量を表す。

次に、図 2.3 に示す初期配向ベクトル \mathbf{a}_0 で、ある方向に剛性が強化された材料を考える。この様に一方向に剛性強化されている材料を横等方性材料 (Transversely Isotropic Material) と呼び、工業的には材料中に繊維を配合することで実現されている。線形弾性の場合と同様にひずみエネルギー関数 Ψ は右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} と $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ の関数となる。ここで $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ は配向強化されたベクトルから構成されるので、構造テンソルと呼ぶ。

ここで、剛体回転による新しい参照座標系を考える。ある位置ベクトルは $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}$ となり、変形後の配向方向のベクトルは $\mathbf{Q}\mathbf{a}_0$ となる。ここで \mathbf{Q} は直交テンソル (回転テンソル) である。新しい座標系での右コーシー・グリーン変形テンソルは $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T$ となるが、回転によってひずみエネルギーの値は変化しないので、

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) = \Psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{Q}\mathbf{a}_0) \quad (2.14)$$

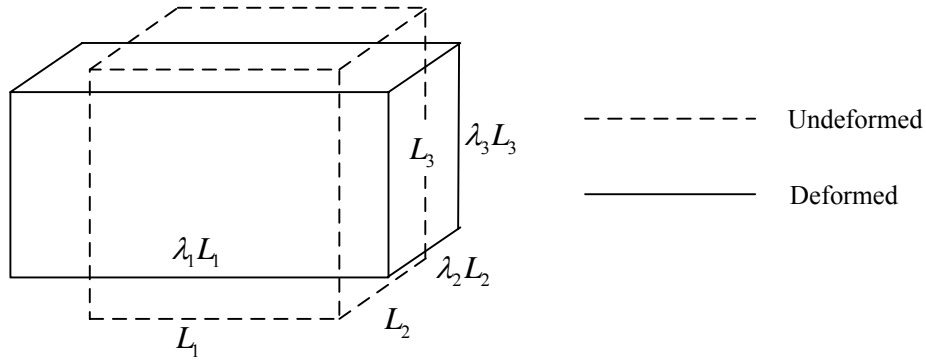


図 2.2 主伸長比

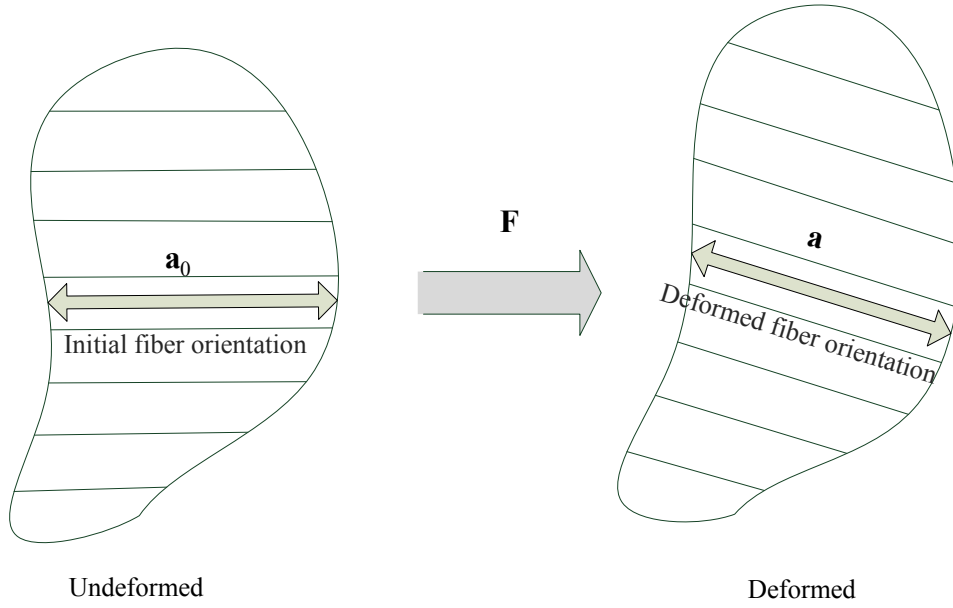


図 2.3 初期配向ベクトル

がすべての直交テンソル \mathbf{Q} について成り立たねばならない．従って，ひずみエネルギー関数 Ψ は式(2.8)から式(2.10)の \mathbf{C} の不変量と式(2.15)と(2.16)の $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ の構造テンソルによる不変量を変数として持つ [37].

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \mathbf{a}_0 = \mathbf{C} : (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \quad (2.15)$$

$$I_5 = \mathbf{a}_0 \mathbf{C}^2 \mathbf{a}_0 = \mathbf{C}^2 : (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \quad (2.16)$$

ここで構造テンソルの不変量について考える．変形後の現座標系での配向ベクトルを \mathbf{a} (単位ベクトル)，配向方向の伸長比を λ とすると

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \quad (2.17)$$

であり，式(2.15)を展開すると

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \mathbf{a}_0 = \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = \lambda \mathbf{a} \lambda \mathbf{a} = \lambda^2 \mathbf{a} \mathbf{a} = \lambda^2 \quad (2.18)$$

である．従って不変量 I_4 の物理的な意味は配向方向の伸張比の 2 乗となる．一方，不変量 I_5 は異方性主軸に対するせん断成分の指標となる．

次に，不変量を基にしたひずみエネルギー関数を用いた横等方性材料での超弾性体の応力を考える．横等方性の性質を含めたひずみエネルギー関数を Ψ としたとき，超弾性体の第 2 ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} は右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} で微分することにより導かれる [21]．

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \Psi}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.19)$$

真応力テンソル \mathbf{T} (Cauchy 応力テンソル) は，次式で得られる．

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (2.20)$$

物質座標系および空間座標系での接線係数を \mathbb{C} ならびに \mathbb{c} とすると

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad \text{または} \quad C_{IJKL} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} \quad (2.21)$$

であり，

$$\mathbb{c} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{F} \mathbf{C} \mathbf{F}^T \mathbf{F}^T \quad \text{または} \quad c_{ijkl} = \frac{1}{J} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL} \quad (2.22)$$

となる．

均質な横等方性超弾性体のひずみエネルギー関数は不変量 I_1 , I_2 , I_3 , I_4 および I_5 に依存するので，

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) \quad (2.23)$$

である．

各不変量を右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} で微分すると

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 \quad (2.28)$$

であり，式(2.19)の第 2 ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} は

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{I} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 \mathbf{C}^{-1} \\ & + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0) \end{aligned} \quad (2.29)$$

と書き下せる．

同様に真応力テンソル \mathbf{T} は、式(2.20)に式(2.29)を代入して

$$\begin{aligned} \frac{J}{2} \mathbf{T} = & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{b} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 \mathbf{I} \\ & + I_4 \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + I_4 \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

となる．

次に非圧縮状態における、ひずみエネルギー関数とその応力場について考える．エラストマーのような高分子材料では、概ね材料は非圧縮状態となり、非圧縮性材料の場合、体積変化がないので、 $I_3 = 1$ である．従って不変量に基づくひずみエネルギー関数は I_3 を消去して I_1 、 I_2 、 I_4 および I_5 で定義づけることができる．

この非圧縮の条件を満足させるための手法としてラグランジェの未定乗数法がある．体積変化率 J （ヤコビアン）は

$$J = \sqrt{I_3} \quad (2.31)$$

であるので、非圧縮の内部拘束条件として

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (2.32)$$

を満たす必要がある．

ここで非圧縮性超弾性体のひずみエネルギー関数を次のように仮定する．

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) + p(J - 1) \quad (2.33)$$

ここで $\Psi(\mathbf{F})$ は $I_3 = 1$ の条件の下での体積を保持した状態でのひずみエネルギー関数であり、 I_3

の不変量は変数から取り除かれ

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(I_1, I_2, I_4, I_5) \quad (2.34)$$

である．

式(2.33)のスカラー量 p は静水圧を表し、ラグランジェの未定乗数として扱われる．Herrmann は要素内に生じる静水圧 p を未知数として剛性方程式内に取り込む手法を定式化した [38]．これは一部の汎用有限要素法ではハーマン要素として用意されている．この手法では数値的に厳密な取り扱いを行えるが、剛性行列の対角項にゼロが出現するので、行列計算が困難になることが弱点である [39]．

一方、ほぼ非圧縮の問題を数値解析するための別の手法が考案されている．ひずみエネルギー

関数を体積変化の項と等容変化の項に分解する手法である [40][41]. これ以降, 体積変化項に対する添字を”vol”で示す. また等容変化の英単語は”isochor”であるので, 等容変化項に付随する変数は”iso”の添字で示す. なお, この等容変化項は偏差項 (deviatoric) と同等であるので, 他の文献では”dev”の添字で示される場合もある. この加算分解の手法を用いることにより, せん断剛性よりはるかに大きい体積弾性を持つが, 微かな圧縮性を有する材料を考慮することが可能となる. 体積変化率 J を変数とする体積変化項のひずみエネルギー関数 $\Psi_{\text{vol}}(J)$ と変形勾配テンソル \mathbf{F} を変数とする等容変化項のひずみエネルギー関数 $\Psi_{\text{iso}}(\mathbf{F})$ に分解すれば, ひずみエネルギー関数 Ψ は

$$\Psi = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\mathbf{F}) \quad (2.35)$$

となる. 体積変化項 Ψ_{vol} および等容変化項 Ψ_{iso} の代表的な形式については, 第 1 章にて述べた.

ひずみエネルギー関数の等容性の項について, 有理的な手法として乗算分解理論 [40]の基に変形勾配テンソル \mathbf{F} ならびに右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} を体積変化項と等容変化項に分解すれば

$$\mathbf{F} = (J^{1/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{F}} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{C} = (J^{2/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{C}} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}} \quad (2.37)$$

である. $J^{1/3} \mathbf{I}$ と $J^{2/3} \mathbf{I}$ は体積変化を表し, $\bar{\mathbf{F}}$ と $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ は等容変化項であり, それぞれ修正変形勾配テンソル, 修正右コーシー・グリーン変形テンソルと呼ぶ. これらは非圧縮条件

$$\det \bar{\mathbf{F}} = \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 = 1 \quad (2.38)$$

および

$$\det \bar{\mathbf{C}} = (\det \bar{\mathbf{F}})^2 = 1 \quad (2.39)$$

を常に満足する.

ここで, 伸長比の等容変化成分については

$$\bar{\lambda}_i = J^{-1/3} \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.40)$$

となる.

そして, 体積変化に依存しない等容変化項のひずみの不変量は式(2.8), (2.9), (2.15), (2.16)より

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \quad (2.41)$$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2 \quad (2.42)$$

$$\bar{I}_4 = J^{-2/3} I_4 \quad (2.43)$$

$$\bar{I}_5 = J^{-4/3} I_5 \quad (2.44)$$

となる。結果としてひずみエネルギー関数は等容変化項のひずみの不変量を変数として持ち、

$$\Psi = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, \bar{I}_5) \quad (2.45)$$

となる。

非圧縮性材料を考慮するためにひずみエネルギー関数を体積変化項と等容変化項に加算分解する手法を示した。次に、加算分解されたひずみエネルギー関数における、応力テンソルの展開を行う。式(2.45)を式(2.29)に代入して、第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} は

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial \Psi_{\text{vol}}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_5} \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (2.46)$$

となる。等容性の各不変量に対する、右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} による偏微分は

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-1} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} = J^{-4/3} \left(I_1 \mathbf{I} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C} \right) \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \left(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 - \frac{1}{3} I_4 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} = J^{-4/3} \left(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 - \frac{2}{3} I_5 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (2.51)$$

と展開できるので、これらを式(2.46)に代入し、ひずみエネルギー関数の不変量による微分値を与えれば、第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} を計算できる。

式(2.46)を式(2.20)に代入して、真応力テンソル \mathbf{T} は体積変化項の応力テンソル \mathbf{T}_{vol} と等容変化項の応力テンソル \mathbf{T}_{iso} に分解され、

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{vol}} + \mathbf{T}_{\text{iso}} \quad (2.52)$$

であり、各応力項は

$$\mathbf{T}_{\text{vol}} = p \mathbf{I} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{J}{2} \mathbf{T}_{\text{iso}} = & \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} \text{dev } \bar{\mathbf{b}} + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \left(\text{tr } \bar{\mathbf{b}} \text{dev } \bar{\mathbf{b}} - \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^2 \right) \\ & + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} \text{dev}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_5} \left[\mathbf{a} \otimes \bar{\mathbf{b}} \mathbf{a} + \mathbf{a} \bar{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{a} - \frac{2}{3} \bar{I}_5 \mathbf{I} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

であり、式(2.53)の静水圧 p は

$$p = \frac{d \Psi_{\text{vol}}(J)}{d J} \quad (2.55)$$

である。

式(2.54)において、 dev は偏差テンソルであり、2階のテンソルを \mathbf{A} としたとき

$$\text{dev} \mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A} \quad (2.56)$$

である。

式 (2.54) での $\bar{\mathbf{b}} = J^{-2/3} \mathbf{b}$ は左コーシー・グリーン変形テンソル $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ の等容変化項である。式 (2.35) の様にひずみエネルギー関数を体積変化項 Ψ_{vol} と等容変化項 Ψ_{iso} に加算分解することにより、式 (2.52) の様に応力テンソルも体積変化項 \mathbf{T}_{vol} と等容変化項 \mathbf{T}_{iso} に分解することができる。これは有限要素法において次の利点がある。変位法による有限要素法解析においてはNewton法による二次の収束性を失うことなく、体積変化項のみを低減積分手法で取り扱うことができる。一般に低減積分要素にはアワーグラスモードが出現する場合があるが、体積変化項のみを低減積分する選択的低減積分要素を用いることでアワーグラスモードを回避できる [42]。

次に本節の最終段階として、陰解法による非線形有限要素解析に必須である接線剛性マトリックスを陽な形で導出する。有限弾性または有限非弾性における非線形解を得るために、陰解法による非線形有限要素解析では増分繰り返し解法（Newton 法）による収束計算手法が用いられる。この収束計算のために、構成則を導く過程は非常に重要であり、空間座標及び物質座標の両方で線形化された構成則が必要である。

ここで、ある時刻 t のある点での第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} を考える。 \mathbf{S} は一変数による非線形テンソルと見なせ、その一変数を右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} と想定する。ここに一般論として、テンソル値の勾配関数を考える。2 階のテンソル \mathbf{B} による非線形テンソル $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ を想定すれば、 $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ も 2 階のテンソルとなる。微分値 $d\mathbf{A}$ を得るために、 \mathbf{B} における \mathbf{A} の 1 階のテーラー展開を行うと

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + d\mathbf{B}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}) + d\mathbf{A} + o(d\mathbf{B}) \quad (2.57)$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} : d\mathbf{B} \quad (2.58)$$

である。ここで、 $o(d\mathbf{B})$ はランダウの記号である。 $\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}) / \partial \mathbf{B}$ の項 ($\text{grad}_{\mathbf{B}} \mathbf{A}(\mathbf{B})$ と表記する)

は \mathbf{B} における \mathbf{A} の勾配 (gradient) であり、導関数 (derivative) とも呼び、4 階のテンソルとなる。式 (2.58) の関係を第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} と右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} の関係に置き換えると

$$d\mathbf{S} = \mathbb{C} : \frac{1}{2} d\mathbf{C} \quad (2.59)$$

であり、

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{または} \quad C_{IJKL} = 2 \frac{\partial S_{IJ}}{\partial C_{KL}} \quad (2.60)$$

の定義を導入できる。

グリーン・ラグランジェひずみテンソル $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I}) / 2$ を用いれば

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{または} \quad C_{IJKL} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} \quad (2.61)$$

である。

\mathbb{C} は \mathbf{S} の勾配関数であり、物質座標系での応力とひずみを関連づける働きをする。この勾配関数 \mathbb{C} を物質弾性テンソルあるいは接線勾配テンソルと呼ぶ。この接線勾配テンソル \mathbb{C} は 4 つの指

標 $IJKL$ による 4 階のテンソルである。接線勾配テンソル \mathbb{C} は第 1 と第 2 の指標あるいは第 3 と第 4 の指標に対して対称となるので、

$$\mathbb{C}_{IJKL} = \mathbb{C}_{JIKL} = \mathbb{C}_{ILJK} \quad (2.62)$$

となり、36 個の独立変数を持つ。これを \mathbb{C} の狭義の対称性と呼ぶ。式 (2.62) の条件はひずみエネルギー関数 Ψ の存在とは独立であり、すべての弾性材料に対して成り立つ。自明の結果としてこの狭義の対称性は右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} （あるいはグリーン・ラグランジェひずみテンソル \mathbf{E} ）と第 2 ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} の対称性を示す。

スカラー値を持つエネルギー関数 Ψ の存在を仮定すると $\mathbf{S} = 2 \partial \Psi(\mathbf{C}) / \partial \mathbf{C}$ の関係式より、次の非常に重要な関係を得る。

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad \text{または} \quad \mathbb{C}_{IJKL} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial C_{IJ} \partial C_{KL}} \quad (2.63)$$

一方、物質座標系での弾性定数の対称性より

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T \quad \text{または} \quad \mathbb{C}_{IJKL} = \mathbb{C}_{KLIJ} \quad (2.64)$$

であり、これを広義の対称性と呼ぶ。したがって \mathbb{C} は 21 個の独立変数を持つ。上式の関係は物質が超弾性であるための必要十分条件である。弾性テンソルの広義の対称性は有限要素法における離散化手法での接線剛性マトリックスの作成を容易にする。

一方、 \mathbb{C} で表記される空間座標系での接線勾配テンソル（または空間弾性テンソル）は物質弾性テンソル \mathbb{C} を現配置に投影（push-forward）する操作を行い、体積変化率 J で除することで得られる。

$$\mathbb{c} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbb{C} \mathbf{F}^T \mathbf{F}^T \quad \text{または} \quad c_{ijkl} = \frac{1}{J} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} \mathbb{C}_{IJKL} \quad (2.65)$$

であり、この空間弾性テンソルも狭義の対称性と広義の対称性を満たす。

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} \quad (2.66)$$

さらに

$$\mathbb{c} = \mathbb{c}^T \quad \text{または} \quad c_{ijkl} = c_{klij} \quad (2.67)$$

である。

これらの物質座標系での弾性テンソル \mathbb{C} ならびに空間座標系での弾性テンソル \mathbb{c} は 4 階のテンソルであり、非線形解析での増分解析手法の区分化の概念と重要に関連づけられ、その具体形が有限要素法プログラムに必須となる。

まず、物質座標系での弾性テンソル \mathbb{C} を導出する。式 (2.45) を式 (2.21) に代入する。

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}(J)}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, \bar{I}_5)}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \mathbb{C}_{\text{vol}} + \mathbb{C}_{\text{iso}} \quad (2.68)$$

ここで、 \mathbb{C}_{vol} と \mathbb{C}_{iso} はそれぞれ体積変化項の弾性テンソルと等容変化項の弾性テンソルであり、それぞれ次式となる。

$$\mathbb{C}_{\text{vol}} = J \left[\left(\frac{\partial \Psi_{\text{vol}}}{\partial J} + J \frac{\partial^2 \Psi_{\text{vol}}}{\partial J^2} \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2 \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \right] \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\text{iso}} = & \Gamma_1 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} + \Gamma_2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} + \Gamma_{11} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1^2} + \Gamma_{22} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2^2} + \Gamma_{12} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \\ & + \Gamma_4 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} + \Gamma_5 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_5} + \Gamma_{44} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4^2} + \Gamma_{55} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_5^2} + \Gamma_{45} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_5} \\ & + \Gamma_{14} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_4} + \Gamma_{15} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_5} + \Gamma_{24} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_4} + \Gamma_{25} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_5} \end{aligned} \quad (2.70)$$

ここで式(2.69)内の $\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}$ の表記は

$$\left(\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \right)_{IKL} = \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{C}^{-1} \right)_{IK} \left(\mathbf{C}^{-1} \right)_{JL} + \left(\mathbf{C}^{-1} \right)_{IL} \left(\mathbf{C}^{-1} \right)_{JK} \right] = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} = - \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.71)$$

を表す.

式(2.70)内のそれぞれの係数は

$$\Gamma_1 = 4 \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{4}{3} J^{-2/3} \left[I_1 \left(\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} + \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) - \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} \right) \right] \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 = 4 \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = & 4 J^{-4/3} \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbb{I} + \frac{2}{3} I_2 \left(\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} I_1 \left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} \right) + \frac{2}{3} \left(\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\Gamma_{11} = 4 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.74)$$

$$\Gamma_{22} = 4 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.75)$$

$$\Gamma_{12} = 4 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4 = & 4 \frac{\partial^2 \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \\ = & \frac{4}{3} J^{-2/3} \left[I_4 \left(\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} + \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) - \left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_5 = & 4 \frac{\partial^2 \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \\ = & \frac{4}{3} J^{-4/3} \left[2 I_5 \left(\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} + \frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) + 3 (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \mathbb{I} + 3 \mathbb{I} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \right. \\ & \left. - 4 (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0) \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\Gamma_{44} = 4 \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.79)$$

$$\Gamma_{55} = 4 \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.80)$$

$$\Gamma_{45} = 4 \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.81)$$

$$\Gamma_{14} = 4 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.82)$$

$$\Gamma_{15} = 4 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.83)$$

$$\Gamma_{24} = 4 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.84)$$

$$\Gamma_{25} = 4 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} + 4 \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.85)$$

である．ここで \mathbb{I} は 4 階の単位テンソルを示す．

式(2.22)を用いれば，式(2.68)の物質座標系での弾性テンソル \mathbb{C} は空間座標系での弾性テンソル \mathbb{C} に変換できる．

$$\mathbb{C}_{\text{vol}} = \left(\frac{\partial \Psi_{\text{vol}}}{\partial J} + J \frac{\partial^2 \Psi_{\text{vol}}}{\partial J^2} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - 2 \frac{\partial \Psi_{\text{vol}}}{\partial J} \mathbb{I} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\text{iso}} = \frac{1}{J} & \left(\gamma_1 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} + \gamma_2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} + \gamma_{11} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1^2} + \gamma_{22} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2^2} + \gamma_{12} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_2} \right. \\ & + \gamma_4 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} + \gamma_5 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_5} + \gamma_{44} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4^2} + \gamma_{55} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_5^2} + \gamma_{45} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4 \partial \bar{I}_5} \\ & \left. + \gamma_{14} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_4} + \gamma_{15} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_5} + \gamma_{24} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_4} + \gamma_{25} \frac{\partial^2 \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_5} \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

ここでそれぞれの係数は

$$\gamma_1 = \frac{4}{3} \left[\bar{I}_1 \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - (\text{dev } \bar{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \text{dev } \bar{\mathbf{b}}) \right] \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{8}{3} & \left[\bar{I}_2 \left(\mathbb{I} - \frac{2}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - \bar{I}_1 (\text{dev } \bar{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \text{dev } \bar{\mathbf{b}}) \right. \\ & \left. + (\mathbf{I} \otimes \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^2 + \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^2 \otimes \mathbf{I}) + 4(\bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{H}}) \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\gamma_{11} = 4(\mathbf{D1} \otimes \mathbf{D1}) \quad (2.90)$$

$$\gamma_{22} = 4(\mathbf{D2} \otimes \mathbf{D2}) \quad (2.91)$$

$$\gamma_{12} = 4(\mathbf{D1} \otimes \mathbf{D2} + \mathbf{D2} \otimes \mathbf{D1}) \quad (2.92)$$

$$\gamma_4 = \frac{4}{3} \left[\bar{I}_4 \left(\mathbb{I} + \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{I}) \right] \quad (2.93)$$

$$\gamma_5 = \frac{4}{3} \left[2\bar{I}_5 \left(\mathbb{I} + \frac{2}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + 3(\bar{\mathbf{F}}\mathbf{a} \otimes \bar{\mathbf{F}}\mathbf{a})\mathbb{I} + 3\mathbb{I}(\bar{\mathbf{F}}\mathbf{a} \otimes \bar{\mathbf{F}}\mathbf{a}) - 4(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \right] \quad (2.94)$$

$$\gamma_{44} = 4(\mathbf{D4} \otimes \mathbf{D4}) \quad (2.95)$$

$$\gamma_{55} = 4(\mathbf{D5} \otimes \mathbf{D5}) \quad (2.96)$$

$$\gamma_{45} = 4(\mathbf{D4} \otimes \mathbf{D5} + \mathbf{D5} \otimes \mathbf{D4}) \quad (2.97)$$

$$\gamma_{14} = 4(\mathbf{D1} \otimes \mathbf{D4} + \mathbf{D4} \otimes \mathbf{D1}) \quad (2.98)$$

$$\gamma_{15} = 4(\mathbf{D1} \otimes \mathbf{D5} + \mathbf{D5} \otimes \mathbf{D1}) \quad (2.99)$$

$$\gamma_{24} = 4(\mathbf{D2} \otimes \mathbf{D4} + \mathbf{D4} \otimes \mathbf{D2}) \quad (2.100)$$

$$\gamma_{25} = 4(\mathbf{D2} \otimes \mathbf{D5} + \mathbf{D5} \otimes \mathbf{D2}) \quad (2.101)$$

ここで

$$\bar{H}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\bar{b}_{ik} \bar{b}_{jl} + \bar{b}_{il} \bar{b}_{jk}) \quad (2.102)$$

$$\mathbf{D1} = \text{dev } \bar{\mathbf{b}} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{D2} = \left(\bar{I}_1 \text{dev } \bar{\mathbf{b}} - \text{dev } \bar{\mathbf{b}}^2 \right) \quad (2.104)$$

$$\mathbf{D4} = \text{dev}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \quad (2.105)$$

$$\mathbf{D5} = \left(\mathbf{a} \otimes \bar{\mathbf{b}}\mathbf{a} + \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{a} - \frac{2}{3} \bar{I}_5 \mathbf{I} \right) \quad (2.106)$$

である。

ここまでに具体的に示した，空間座標及び物質座標の両方での接線剛性の係数と応力テンソルを有限要素プログラムに組み込むことで，異方性超弾性体を取り扱える。また，その時のひずみエネルギー関数の変数は，不変量に基づく形式を取る。

2.3. 結論

本章では、まず一方向に剛性強化された横等方性の超弾性体を有限要素法で解析するために必要な異方性超弾性構成則の支配方程式を導いた。超弾性体の応力解析を行うにはひずみエネルギー関数を用いる必要があり、それを体積変化項と体積変化に依存しない等容変化項に加算分解することにより、有限要素法での定式化が有利になることを示した。等容変化項を表すひずみエネルギー関数には伸長比を変数とする形式と不変量を変数とする形式の二つがあるが、本章ではひずみの不変量に基づく形式について、応力テンソルと有限要素解析に最も重要な接線剛性について示した。また従来の研究では一方向に剛性強化された横等方性を考慮に入れた超弾性体のひずみエネルギー関数は論じられているが、空間座標と物質座標の二つの座標系に基づいた接線剛性マトリックスの導出はなされていない。このため、本論文では空間座標と物質座標での接線剛性について、整合性の取れた陽な形式で導出した。

本研究で提案する理論及び支配方程式を用いて、異方性を含む超弾性体の応力解析ができ、従来問題とされていた解の収束性及び精度の問題を解決できる。そして、本章で導出した支配方程式は今後のゴム・エラストマーの研究開発において有効な計算実験手法として利用できる。

第3章 異方性超弾性材料の応力解析

従来の有限要素法解析では超弾性材料は等方性の仮定の下に進められてきた。しかし、心筋細胞を材料として捉えたとき、その特徴は非圧縮性超弾性体であり、細胞骨格の配向方向に強い剛性を持つ異方性材料として扱わなければならない。また、機械工学分野において工作機械やOA機器・自動車など様々な分野で使用されている伝動ベルトは帆布・心線などを含む複雑構造であり、その大部分はゴム材料で構成されている。その中でも、図 3.1 に示すVベルトのようにプーリにくさび状に食い込ませて使用するベルトでは、その幅方向（図 3.1 の矢印方向）に強い圧縮力を受ける。そこでゴムに短繊維を配合して圧延し、その短繊維の向きが幅方向になるように成形することで、幅方向に強い剛性を持つようにベルトは設計されている。この圧延成形条件のもとで短繊維を含有したゴム材料は強い異方性を持つと共に、短繊維が配向された方向で引張側と圧縮側の剛性が大きく異なる特徴を持つ。

本章では、上述したような異方性超弾性体の変形特性を解析するための手法について論じる。そのためには異方性超弾性体のひずみエネルギー関数の導出と材料物性値の同定手法が必要である。また、異方性の材料物性値を同定するためには横等方性材料の応力理論解を導出する必要がある。このため次節以降で横等方性材料の応力理論解を導出した後、異方性超弾性体のひずみエネルギー関数と材料物性値の同定手法を導出する。次に、一般産業用 V ベルトで使用されているナイロン短繊維を含有したゴム材料を材料試験片として単軸試験・一軸拘束二軸引張試験を行い、それらの応力-ひずみ曲線から材料物性値を同定し、得られた材料物性値を用いた有限要素法解析を行い、実験結果との比較を行う。最後に、ベルトは曲げ変形が主体であるので、ナイロン短繊維の配向方向が異なる材料試験片の曲げ試験を行い、多軸場における実験結果と有限要素法解析との結果を比較する。

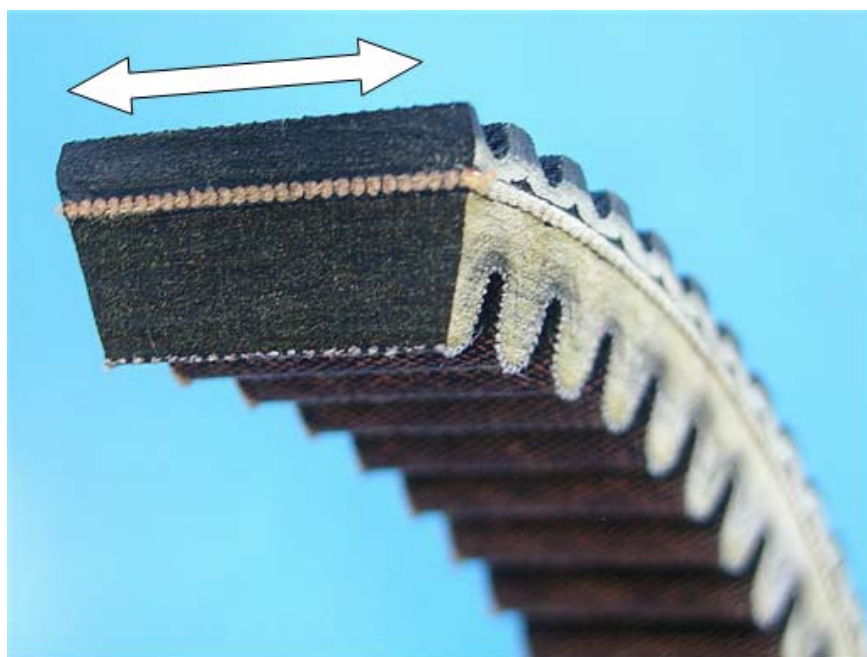


図 3.1 Raw edge cogged V-belt

3.1. 横等方性材料の応力理論解の導出

超弾性体のひずみエネルギー関数には様々なモデルが示されており，それぞれの材料物性値はその理論背景によって異なる意味を持つ．材料物性値を同定するためにはそれぞれのひずみエネルギー関数に対応した公称応力理論解が必要であり，これまでに多く示されてきた [43][44][27]．以下に，変形の主軸方向の公称応力を f として，代表的なひずみエネルギー関数の公称応力理論解を示す．また，表 3.1 に各変形モードの概略と各変形テンソルを示す．

- Mooney-Rivlin モデル
$$W = \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^T C_{rt} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^t \quad (3.1)$$

単軸変形
$$f = 2 \left[\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (3.2)$$

せん断変形
$$f = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (3.3)$$

均等二軸変形
$$f = 2 \left[\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (3.4)$$

- Ogden モデル
$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3 \right) \quad (3.5)$$

単軸変形
$$f = \sum_{n=1}^N \mu_n \left(\lambda^{\alpha_n-1} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_n-1} \right) \quad (3.6)$$

せん断変形
$$f = \sum_{n=1}^N \mu_n \left(\lambda^{\alpha_n-1} - \lambda^{-\alpha_n-1} \right) \quad (3.7)$$

均等二軸変形
$$f = \sum_{n=1}^N \mu_n \left(\lambda^{\alpha_n-1} - \lambda^{-2\alpha_n-1} \right) \quad (3.8)$$

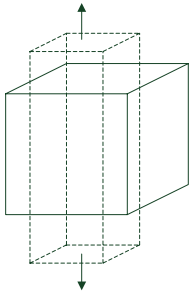
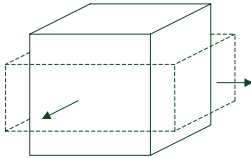
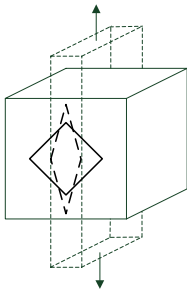
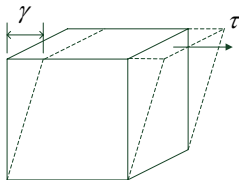
- Gent モデル
$$W = -\frac{E}{6} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right) \quad (3.9)$$

単軸変形
$$f = \frac{E}{6} \frac{1}{1 - (I_1 - 3)/J_m} (2\lambda_1 - 2\lambda^{-2}) \quad (3.10)$$

せん断変形
$$f = \frac{E}{6} \frac{1}{1 - (I_1 - 3)/J_m} (2\lambda - 2\lambda^{-3}) \quad (3.11)$$

均等二軸変形
$$f = \frac{E}{6} \frac{1}{1 - (I_1 - 3)/J_m} (2\lambda - 2\lambda^{-5}) \quad (3.12)$$

表 3.1 変形モード

| Mode | Uniaxial | Biaxial | Pure Shear | Simple Shear |
|---|---|---|---|---|
| Deformation $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$ | $\begin{bmatrix} \lambda X_1 \\ X_2/\sqrt{\lambda} \\ X_3/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda X_1 \\ \lambda X_2 \\ X_3/\lambda^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda X_1 \\ X_2/\lambda \\ X_3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} X_1 + \gamma X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ |
| Deformation Gradient $\mathbf{F} =$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| Finger Tensor $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ | $\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| Principal Stretch Ratio $\lambda_i =$ | $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1/\sqrt{\lambda} \\ 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1/\lambda^2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1/\lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{\gamma^2}{2}+\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}} \\ \sqrt{1+\frac{\gamma^2}{2}-\gamma\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}} \\ 1 \end{bmatrix}$ |
| Shape |  |  |  |  |

式 (3.1), (3.5), (3.9) に示す従来のひずみエネルギー関数は、全て等方性の仮定の下に導出されており、繊維強化された複合材料に見られる異方性を有する超弾性体材料には適用できない。このため以降で、横等方性材料の配向方向および配向直角方向の単軸変形下における公称応力理論解を導出する。

図 3.2 の単位寸法の立方体を考える。繊維強化された異方性を含めたひずみエネルギー関数は非圧縮の仮定を取ると、不変量を変数として

$$W = W(I_1, I_2, I_4) \quad (3.13)$$

となる。ここで、

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (3.14)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (3.15)$$

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \mathbf{a}_0 = \mathbf{C} : (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \quad (3.16)$$

であり、 I_1 と I_2 は、長さ方向の変化量と表面積の変化量となる。ここで、 λ_i は主軸方向の伸長比であり、 \mathbf{a}_0 は配向方向の初期ベクトル、 \mathbf{C} は右コーシー・グリーン変形テンソルである。図 3.2 に示すような配向方向の条件と 1 軸方向に単軸変形する仮定を取ると、変形後の現座標系での配向ベクトルを \mathbf{a} (単位ユニット) として、変形勾配テンソル \mathbf{F} を用いると、伸張比 λ_1 の間には、

$$\lambda_1 \mathbf{a} = \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \quad (3.17)$$

という関係が成り立ち、式(3.17)を式(3.16)に代入して、 I_4 は

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \mathbf{C} \mathbf{a}_0 = \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = \lambda_1 \mathbf{a} \lambda_1 \mathbf{a} = \lambda_1^2 \mathbf{a} \mathbf{a} = \lambda_1^2 \quad (3.18)$$

と表すことができる。この式(3.18)から I_4 は配向方向の伸張比の二乗を意味することがわかる。

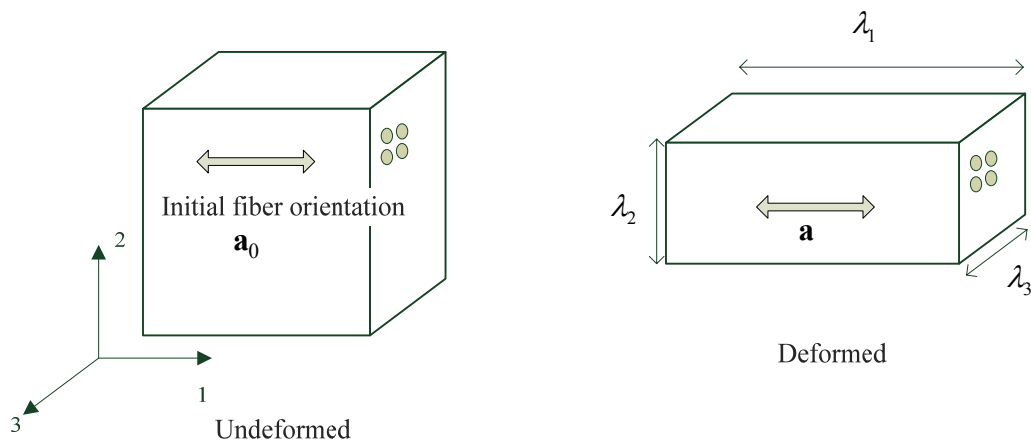


図 3.2 繊維強化された単位寸法の立方体

次に、単軸変形における異方性超弾性体の応力理論解を導出する．非圧縮を仮定した超弾性体の主軸方向の真応力 t_i は、不定圧力（静水圧）を p として

$$t_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + p \quad (3.19)$$

で得られる [44]. 式(3.13)に示される不変量を基にしたひずみエネルギー関数 W において、応力は微分の連鎖則を用いると

$$t_i = \lambda_i \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial W}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \lambda_i} \right) + p \quad (3.20)$$

となる．

式(3.14)(3.15)について、伸長比 λ_i で微分すれば

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda_i} = -\frac{2}{\lambda_i^3} \quad (3.22)$$

となり、式(3.18)の I_4 については 1 軸方向のみが有効となるため、各方向の伸長比で微分すれば

$$\frac{\partial I_4}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial I_4}{\partial \lambda_3} = 0 \quad (3.24)$$

となる．

式(3.21)(3.22)を式(3.20)に代入することで、真応力 t_i は次式となる．

$$t_i = 2 \left(\lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial \lambda_i} + p \quad (3.25)$$

式(3.23)(3.24)を用いて各成分に展開すると

$$t_1 = 2 \left(\lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) + 2\lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_4} + p \quad (3.26)$$

$$t_2 = 2 \left(\lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) + p \quad (3.27)$$

$$t_3 = 2 \left(\lambda_3^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_3^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) + p \quad (3.28)$$

となる．

静水圧を用いた単軸変形下での真応力 t_i の一般解を導出できたので、次に 図 3.3 に示す配向主軸方向（1 軸）に負荷を受ける単軸状態での軸方向の応力解を導出する．断面内では等方性であ

るため、引張方向の伸長比 λ_1 を $\lambda_1 = \lambda$ とすると、断面方向の伸長比 λ_2 及び λ_3 は $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda}$ となる。また、軸方向にのみ荷重を負荷しているので、断面内の応力 t_2 及び t_3 は $t_2 = t_3 = 0$ となる。これらの関係を式(3.26)(3.27)に代入すると、次式が得られる。

$$t_1 = 2 \left(\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) + 2\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_4} + p \quad (3.29)$$

$$t_2 = 2 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_1} - \lambda \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) + p = 0 \quad (3.30)$$

式(3.29)(3.30)から不定圧力 p を消去すると、主軸方向の応力成分は

$$t_1 = 2 \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] + 2\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_4} \quad (3.31)$$

であり、1軸に垂直な面積 $\lambda_2 \lambda_3 = 1/\lambda$ を乗ずると、公称応力は

$$f_1 = 2 \left[\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] + 2\lambda \frac{\partial W}{\partial I_4} \quad (3.32)$$

で得られる。式(3.32)の最終項は繊維強化による効果を表すことになり、最終項を取り除けば、式(3.2)に示すMooney-Rivlinモデルにおける等方性超弾性体の単軸変形公称応力と一致する。

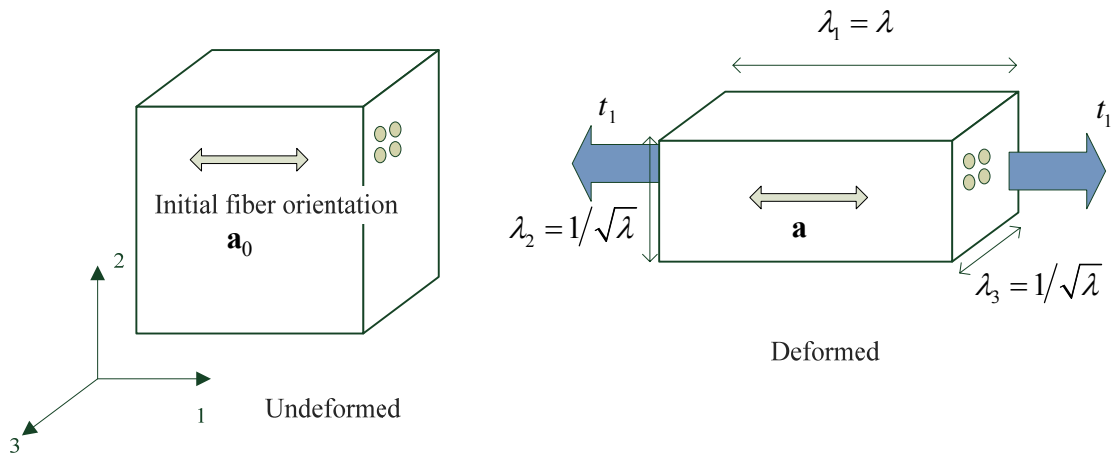


図 3.3 配向主軸に平行な単軸変形

次に、図 3.4 に示すような、配向主軸（1 軸）に直角な 2 軸方向に荷重を受ける場合を考える．式(3.26)(3.27)(3.28)の各成分の差を取り，不定圧力を消去すると

$$t_2 - t_3 = 2(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\left(\frac{1}{\lambda_3^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (3.33)$$

$$t_2 - t_1 = 2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \frac{\partial W}{\partial I_2} - 2\lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_4} \quad (3.34)$$

となる．2 軸方向に垂直な断面内の応力は $t_1 = t_3 = 0$ であることから，式(3.33)(3.34)より，荷重方向の真応力は

$$t_2 = (2\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 - 2\lambda_1^2 \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} - \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_4} \quad (3.35)$$

となる．2 軸に垂直な面積 $\lambda_1 \lambda_3 = 1/\lambda_2$ を乗ずると，2 軸方向の公称応力 f_2 は

$$f_2 = \frac{1}{\lambda_2} \left[(2\lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 - 2\lambda_1^2 \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} - \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_4} \right] \quad (3.36)$$

となる．等方性材料であれば

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (3.37)$$

の関係により，式(3.36)は λ_2 のみで表現できるが，断面内では異方性となるので， $\lambda_1 \neq \lambda_3$ であり， λ_1 と λ_3 も測定する必要がある．しかし，実際の単軸試験において荷重軸に直交したひずみを計測するのは困難であるので， ε_i を工学ひずみ，断面内の伸張比の比率を α として，

$$\varepsilon_3 : \varepsilon_1 = (\lambda_3 - 1) : (\lambda_1 - 1) = \alpha : 1 \quad (3.38)$$

とする．

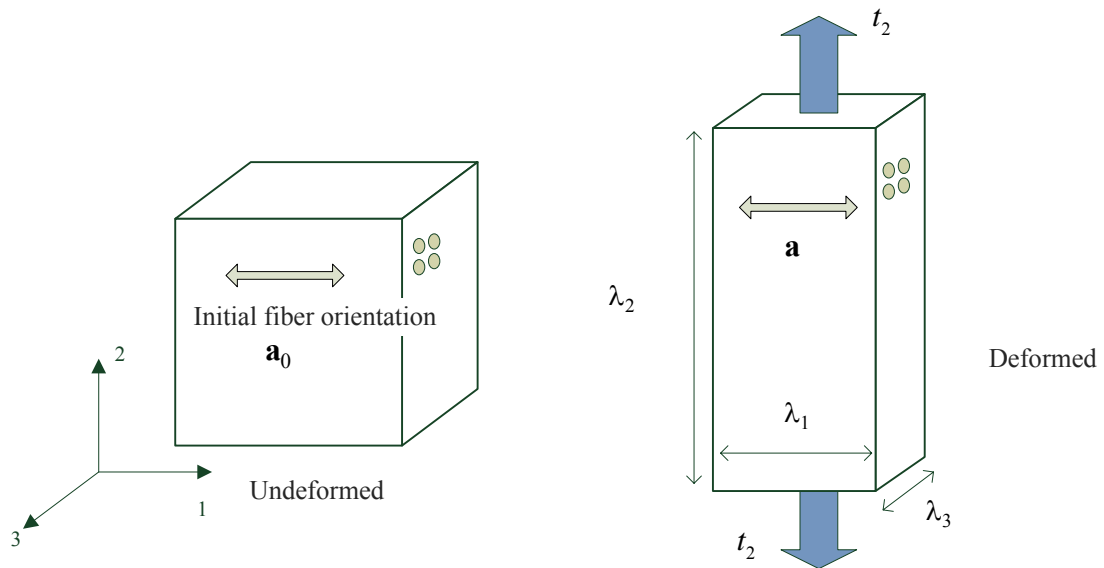


図 3.4 配向主軸に直角な単軸変形

非圧縮の条件より， λ_1 と λ_2 の関係は

$$\alpha\lambda_1^2 + (1-\alpha)\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} = 0 \quad (3.39)$$

となり，式(3.39)の 2 次方程式の内，正の解は

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha-1) + \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\alpha \frac{1}{\lambda_2}}}{2\alpha} \quad (3.40)$$

となる．すなわち，断面内の伸張比の比率 α を得ることで，式(3.36)に示す配向主軸に直角に負荷する場合の単軸変形の公称応力理論解を算出することができる．

次に，配向主軸に垂直な単軸変形下での断面内の伸長比 λ_1 と λ_3 の比率 α を線形異方性弾性体の理論式から以下のように導出する．線形弾性体の基礎理論 [45]を用いると異方性の応力－ひずみ関係は式(3.41)となる．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

図 3.2 の様に 1 軸方向に繊維強化されている横等方性材料では， $S_{22} = S_{33}$ ， $S_{12} = S_{13}$ ， $S_{55} = S_{66}$ であり，対称性を考慮して，その応力－ひずみ関係は式(3.42)となり，独立変数は 6 個となる．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

式(3.42)において，せん断成分を除いて直成分のみで考慮すれば

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

と簡略表記できる．

図 3.4 の様に，配向直角方向（2 軸方向）に荷重負荷する状態を想定すると，既知数は σ_2 ， $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ ， ε_2 となり，式(3.43)より

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

であり,

$$\varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2, \quad \varepsilon_3 = S_{23}\sigma_2 \quad (3.45)$$

であることから, S_{12} と S_{23} を得ることができれば, 荷重方向に垂直な断面内のひずみ ε_1 と ε_3 の比率を得ることができる.

しかし, 単軸試験から断面内の異方性の比率を計測するのは困難であるので, 図 3.5 に示す一軸拘束二軸引張変形を考える. 図 3.5 のように, 配向主軸方向を拘束し, 配向直角方向へ引っ張る場合, $\sigma_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ となり, 式(3.43)より

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

であり,

$$0 = S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_3 \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1 + S_{23}\sigma_3 \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_3 = S_{12}\sigma_1 + S_{22}\sigma_3 \quad (3.49)$$

となる. 式(3.47)より,

$$S_{12} = -S_{11}\sigma_1/\sigma_3 \quad (3.50)$$

であり, S_{11} は配向方向に負荷を与える単軸試験により求めることができる. さらに非圧縮条件を仮定すると

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = (\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + 1)(\varepsilon_3 + 1) = 1 \quad (3.51)$$

となる.

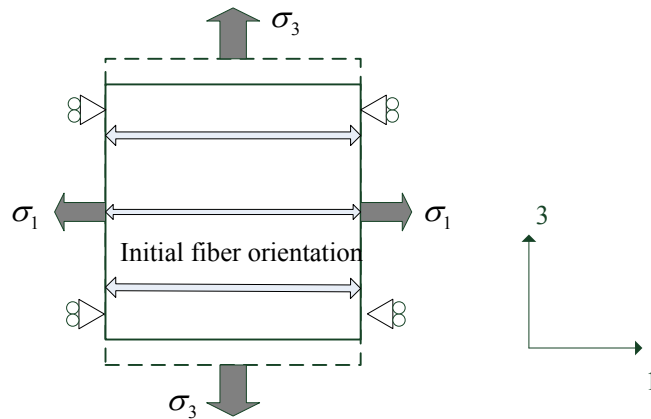


図 3.5 一軸拘束二軸引張変形

ここで、配向主軸方向は拘束しているので、 $\varepsilon_1 = 0$ の条件を式(3.51)に代入して、

$$\varepsilon_2 = 1/(\varepsilon_3 + 1) - 1 \quad (3.52)$$

となり、式(3.52)を式(3.48)に代入して、

$$S_{23} = (\varepsilon_2 - S_{12}\sigma_1)/\sigma_3 \quad (3.53)$$

の関係を得られる。式(3.50)の S_{12} と式(3.53)の S_{23} を式(3.45)に適用することで、面内のひずみ ε_1 と ε_3 を算出することができる。このように、一軸拘束二軸引張試験の結果をもとに、図 3.4 に示す異方性主軸に直角に荷重負荷した際の面内のひずみ ε_1 と ε_3 を得ることができ、これらのひずみ比率を伸長比の比率として扱えば、式(3.36)に示す配向直交方向の横弾性体の応力理論解を計算することが可能となる。

3.2. 異方性のひずみエネルギー関数の導出と材料物性値同定手法

本節ではゴム材料に繊維強化された複合材料の異方性ひずみエネルギー関数を導出し、その材料物性値の同定手法を確立する。まず、異方性超弾性体のひずみエネルギー関数を導出するために、その異方性特性を示す材料物性値の特徴について考える。そのため、異方性の効果を含めた最も単純なひずみエネルギー関数として、式(3.54)で示されるNeo-Hooke則を修正したひずみエネルギー関数を考える。そして、このひずみエネルギー関数における配向主軸方向の応力理論解を導出し、数値解との比較を行う。

$$W = \frac{1}{2}G(I_1 - 3) + \frac{1}{2}G\gamma(I_4 - 1)^2 \quad (3.54)$$

式(3.54)のひずみエネルギー関数において、 G は等方性の挙動を示す材料物性値であり、せん断剛性である。 γ は異方性に関する物性値であり、等方性のマトリックスに対して、配向強化されている比率を表す。 $\gamma = 0$ の場合は等方性材料であり、Neo-Hooke則に完全に一致する。

図 3.2 に示すように、初期配向ベクトルを $\mathbf{a}_0 = (1, 0, 0)$ として、1 軸方向に平行であり、1 軸方向への単軸変形条件を考えると、ひずみの不変量 I_1 および I_4 は式(3.14)および式(3.18)より

$$I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} \quad (3.55)$$

$$I_4 = \lambda_1^2 \quad (3.56)$$

となる。式(3.54)を各不変量で微分すれば

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{1}{2}G \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_4} = G\gamma(I_4 - 1) \quad (3.58)$$

である。式(3.55)から(3.58)の関係を式(3.31)に代入して、引張方向の真応力 t_1 は

$$t_1 = G \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right) + 2G\gamma\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - 1) \quad (3.59)$$

であり、配向主軸方向の応力理論解となる。

式(3.59)の理論解と検証するために有限要素法解析を行った。汎用有限要素法コードMSC.Marcに横等方性超弾性体の構成則を組み込み、ユーザールーチンを用いて、式(3.54)に示す異方性のひずみエネルギー関数を組み込んだ。

図 3.6 に示す単位長さを持つ 3 次元六面体ソリッド要素を使用して、単軸試験の模擬解析を行った。要素内の円筒が初期配向ベクトルを示し、 $\mathbf{a}_0 = (1, 0, 0)$ である。剛体モードを除去するための境界条件として、節点番号①④⑤⑧の 1 軸方向、節点番号①②⑤⑥の 2 軸方向、節点番号①②③④の 3 軸方向に変位拘束条件を与えた。節点番号③⑥⑦には節点番号②と 1 軸方向の変位条件が同じとなる多点拘束境界条件を設定し、節点番号②番に 1 軸方向の引張と圧縮の強制変位を与えた。この多点拘束条件により、節点番号②番の 1 軸方向に強制変位を与えれば、③⑥⑦の節点の 1 軸方向に同じ変位が得られる。また、節点番号②番の反力は節点番号②-③-⑦-⑥で構成される単位面積の面の力を代表するので、節点番号②番の反力を公称応力として扱える。なおかつ、節点番号②番の変位量を工学ひずみとして扱える。図 3.7(a)にひずみ量 1.0 まで引張条件を与えた状態を示し、図 3.7(b)にひずみ量-0.5 まで圧縮条件を与えた状態を示す。いずれも実線で示した単位立方体の要素が変形前の形状を示し、灰色表示した要素が変形後の形状である。

異方性物性値 γ の値を変えて、式(3.59)による理論解と有限要素法による解析結果を図 3.8 に示す。図 3.8 の縦軸は応力値をせん断剛性 G で除した無次元化した数値であり、横軸は 1 軸方向の伸長比を示す。理論解の $\gamma = 0$ を実線、 $\gamma = 1$ を破線、 $\gamma = 10$ を点線、 $\gamma = 100$ を一点鎖線で示す。有限要素法による数値計算結果の $\gamma = 0$ を○、 $\gamma = 1$ を□、 $\gamma = 10$ を△、 $\gamma = 100$ を◇のシンボルプロットで示す。理論解と有限要素解析結果は完全に一致しており、本研究での有限要素法での接線剛性の組み込みが正しく行われていることが示されている。 $\gamma = 0$ の場合は等方性材料であり、Neo-Hooke 則に完全に一致する。

図 3.8 の引張側の結果から、異方性物性値の γ が大きければ配向方向への伸びに対して、より強い力が必要であることがわかる。また、圧縮側の結果から、異方性物性値の γ が等方性の物性値であるせん断剛性 G に対して 10 倍以上になると圧縮側で数値座屈挙動を示すことがわかる。このように、等方性の物性値と異方性の物性値の間には、圧縮側で数値座屈を伴う相関関係が、式(3.59)に示す理論解ならびに有限要素法解析によって示された。従って、汎用的なひずみエネルギー関数を導出する際には、座屈現象を回避するための手法を考慮する必要がある。

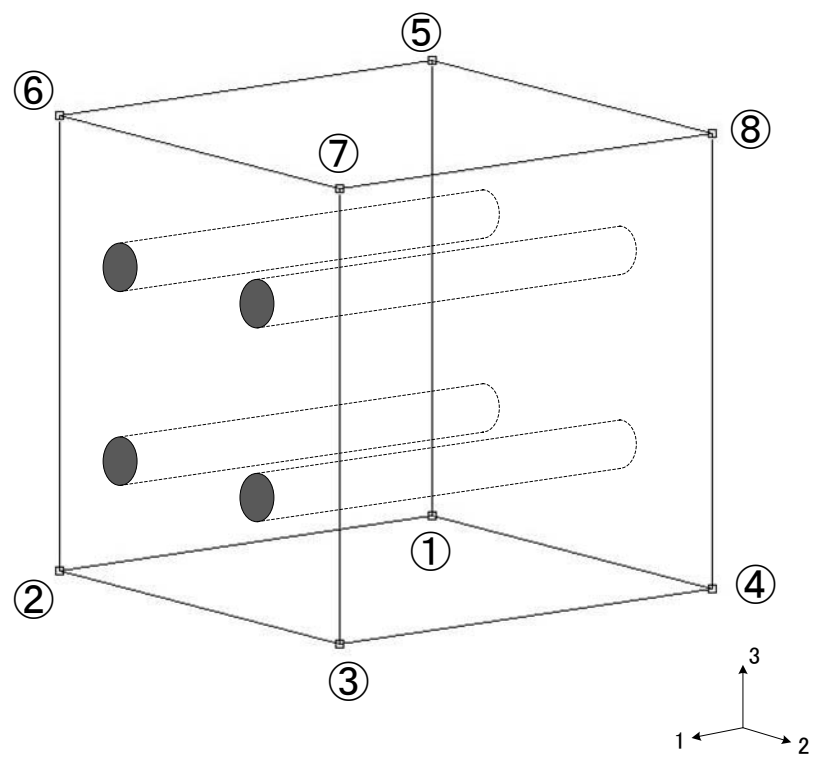


図 3.6 単軸解析モデル

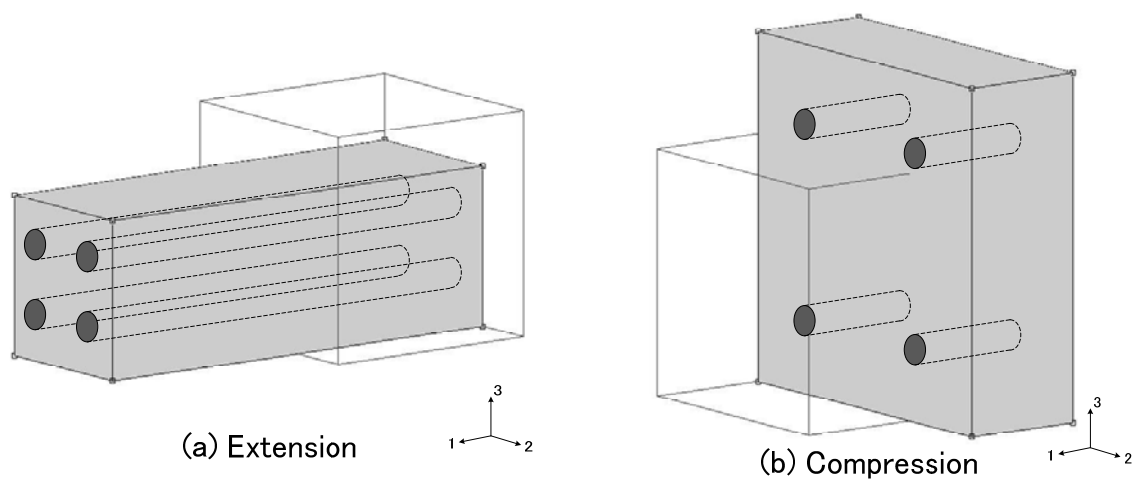


図 3.7 単軸変形状態

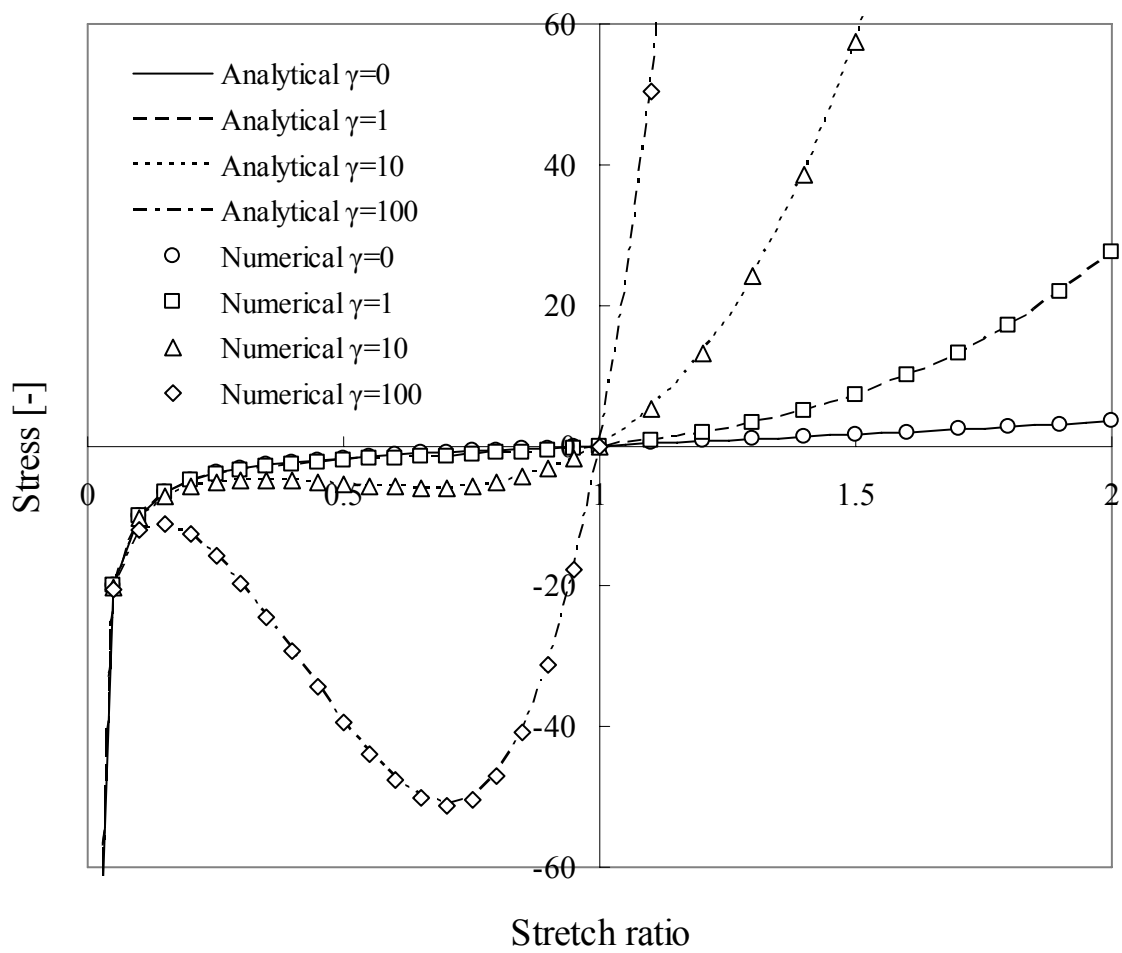


図 3.8 単軸変形における真応力－伸長比曲線

上述した異方性材料に特有な数値座屈現象を考慮した上で、より汎用的な取り扱いが行えるようにMooney-Rivlinの2項モデルに異方性の項を組み込んだ式(3.60)のひずみエネルギー関数を導出する。

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{42}(I_4 - 1)^2 + C_{43}(I_4 - 1)^3 \quad (3.60)$$

右辺の第1項と第2項は通常のMooney-Rivlinの2項モデルと同じであり、材料の等方性挙動を表現する。異方性挙動を表す項として第3項と第4項に異方性主軸の不変量である I_4 のべき乗項を追加した。上述したように、この I_4 のべき乗項の材料物性値 C_{42} および C_{43} の大きさによっては、数値計算において配向方向圧縮側で座屈現象が発生する場合があるので注意を要する。また一般に、異方性材料の配向方向における引張側と圧縮側の剛性は大きく異なることが多い。従って、数値座屈を解消することと、引張側と圧縮側の剛性変化を精度良く取り扱うことができるように、異方性特性の物性値である C_{42} および C_{43} については配向方向の引張側と圧縮側で異なる値を使用できるようにユーザールーチンでモデル化した。ユーザールーチン内では式(3.18)にある配向方向の伸長比をもとに、材料が引張側にあるか圧縮側にあるかを容易に判定できる。

図 3.9 に、式(3.60)のひずみエネルギー関数で用いられる材料物性値 $C_{10}, C_{01}, C_{42}, C_{43}$ の同定手順を示す。繊維強化された異方性材料は、配向方向と配向直角方向で大きく異なる挙動を持つので、その両方の応力-ひずみ関係を満足するように材料物性値を決定する必要がある。そのために、3.1節で示した横等方性の応力理論解を用いる。横等方性の応力理論解で示したように、繊維強化異方性材料の物性値を同定するための試験として、配向方向に平行な単軸試験と配向方向に直角な単軸試験、および配向方向を拘束した一軸拘束二軸引張試験が必要である。一軸拘束二軸引張試験を行うことで、配向主軸に直角に負荷を与えた場合の断面内のひずみ比率を得る。その比率を用いて配向直角方向の単軸変形状態の理論解を算出する。式(3.32)の配向方向の応力理論解と式(3.36)の配向直角方向の応力理論解から、それぞれの実験結果と理論解の差がなくなるように、最小二乗法を用いて材料物性値を同定する。また、異方性物性値の C_{42}, C_{43} については引張側と圧縮側で異なるパラメータを算出する。

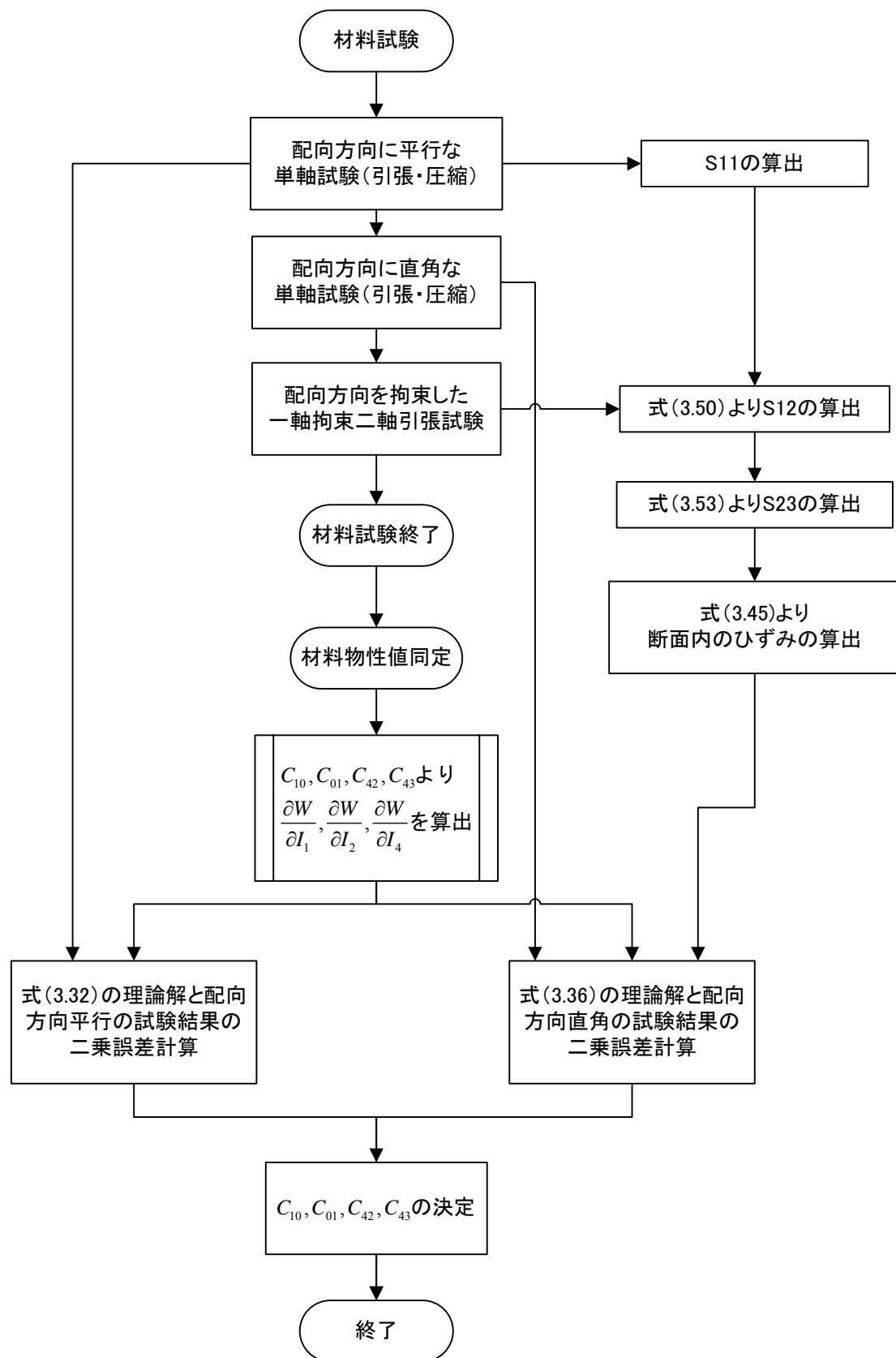


図 3.9 材料物性値同定フローチャート

3.3. ひずみエネルギー関数の検証

前節で導出した異方性超弾性体のひずみエネルギー関数およびその材料物性値の同定手法を検証するために、一般的な伝動ベルトのゴム材料を試験片として使用する。伝動ベルトのゴム材料は図 3.1 に示すように幅方向に強い圧縮力を受けるため、その方向にナイロン短繊維が配向されている構造を有しており、強い異方性特性を持つ繊維複合材料である。この伝動ベルトのゴム試験片を用いて、まず単軸試験と一軸拘束二軸引張試験を行う。次に試験で得た応力-ひずみ曲線から異方性超弾性体のひずみエネルギー関数の物性値を前節の手法を用いて同定する。そして、汎用有限要素法プログラムを用いて数値解析を行い、実験との比較を行う。

3.3.1. 単軸試験

図 3.10 の単軸試験模式図に示すように、単軸試験においては引張側と圧縮側で個別に試験を行った。図中の材料のハッチング表示が短繊維方向を表している。引張試験での試験片は圧延成形されたゴム材料から、角度を変えて短冊状試験片（幅 5mm、長さ 100mm、厚さ 2mm）を 2 種類切り出す。それらの試験片を用いて、図 3.10(a)(b)に示すように、繊維方向が引張方向と一致する場合と直交する場合について引張試験を行った。ひずみ量は試験片を保持するチャック間隔から算出した。チャック表面には滑り止めペーパーを挟み、滑りによる誤差を少なくした。

圧縮試験ではJIS規格K6254に準拠する、25mm角、高さ 12.5mmの角形試験片を用いた。引張試験と同様に圧延成形されたゴム材料から、角度を変えて切り出した。図 3.10(c)(d)に示すように、圧縮方向に繊維方向が一致する場合と直交する場合について圧縮試験を行った。試料にはシリコン潤滑剤を添付し、摩擦を軽減した。

以下、短繊維方向が引張・圧縮方向と平行なモデルを繊維平行モデルと称し、短繊維方向が引張・圧縮方向に対して直交したモデルを繊維直角モデルと称す。測定機器には島津製作所製 50kN オートグラフを用いた。

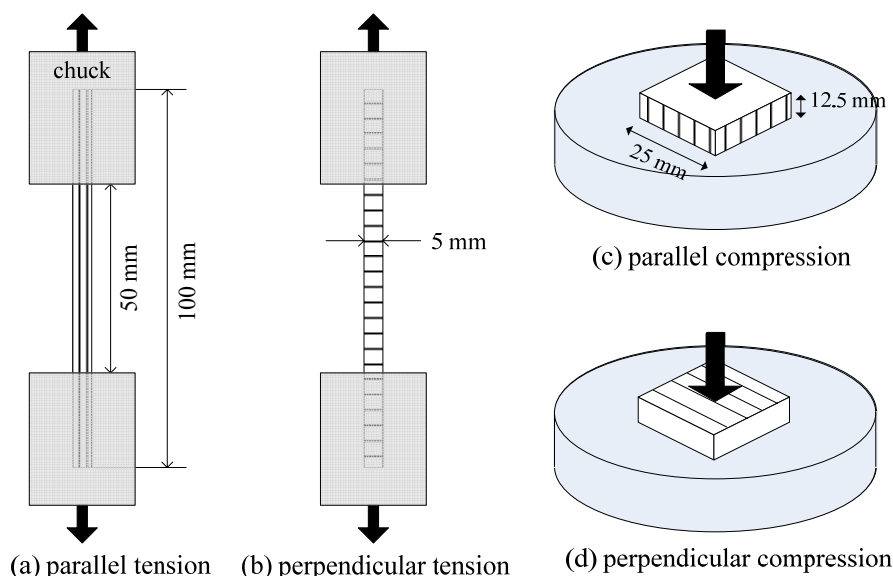


図 3.10 単軸試験模式図

引張領域での試験結果を図 3.11 に、圧縮領域の試験結果を図 3.12 に示す。いずれも横軸は公称ひずみであり、縦軸は公称応力である。繊維平行モデルを■で、繊維直角モデルを▲で示す。図 3.11 と 図 3.12 の■で示されるように繊維平行モデルにおいては、引張側と圧縮側で接線剛性が大きく異なっている。また、繊維平行モデルの引張側の剛性は繊維直角モデルの剛性に比べて 3 倍大きくなっているが、圧縮変形においてはひずみが 0.05 程度までは同じであるがひずみが 0.2 の場合、繊維直角の方が 1.6 倍大きくなっている。これらはいずれもナイロン短繊維による異方性の影響に寄るものであり、これらの挙動について物理的な考察を次に行う。繊維平行モデルにおいてはナイロン短繊維の効果により引張側に補強の効果が与えられ、大きな剛性変化が得られるので、繊維直角モデルに対して大きな剛性となる。しかし、繊維平行モデルの圧縮側には短繊維が座屈挙動を取ることで、基の母材に対して剛性の変化はそれほど顕著には見られないと考察される。また、繊維直角モデルに対して圧縮挙動を与えることはナイロン短繊維が伸びる方向となるので、堅くなると考察できる。

3.3.2. 一軸拘束二軸引張試験

異方性主軸直角方向の応力理論解を計算するために必要な、断面内のひずみ比率を得るために一軸拘束二軸引張試験を行った。試験材料は単軸試験と同じ配合のものを使用し、試験片の大きさは 80mm 角、厚さ 2mm のシート状の試験片を用いた。測定機器には、図 3.13 に示すカトーテック社製の二軸引張試験器を用いた。図中の白矢印がナイロン短繊維の配向方向であり、長さは約 80mm を示す。この試験片配置において縦方向を拘束し、横方向に引張条件を与えた。試験結果を図 3.14 に示す。破線で示す拘束方向（繊維方向）にも力が必要であり、その力に対して実線で示す引張方向の力は約 2.5 倍となる結果となった。本研究で考案した異方性材料物性値同定手法には直接必要ではないが、横方向にナイロン短繊維を配置して一軸拘束二軸引張試験を行った結果を図 3.15 に、二軸均等引張試験の結果を図 3.16 に示す。図 3.15 に示すように繊維方向に引っ張る場合には、繊維方向に強い力が必要であり、繊維直角方向を拘束する力に比べて約 15 倍の大きな力が必要であることが、この材料の特徴を示している。図 3.16 に示す二軸均等引張試験では繊維方向の力が、繊維直角方向に比べて約 4 倍の力が必要となる。

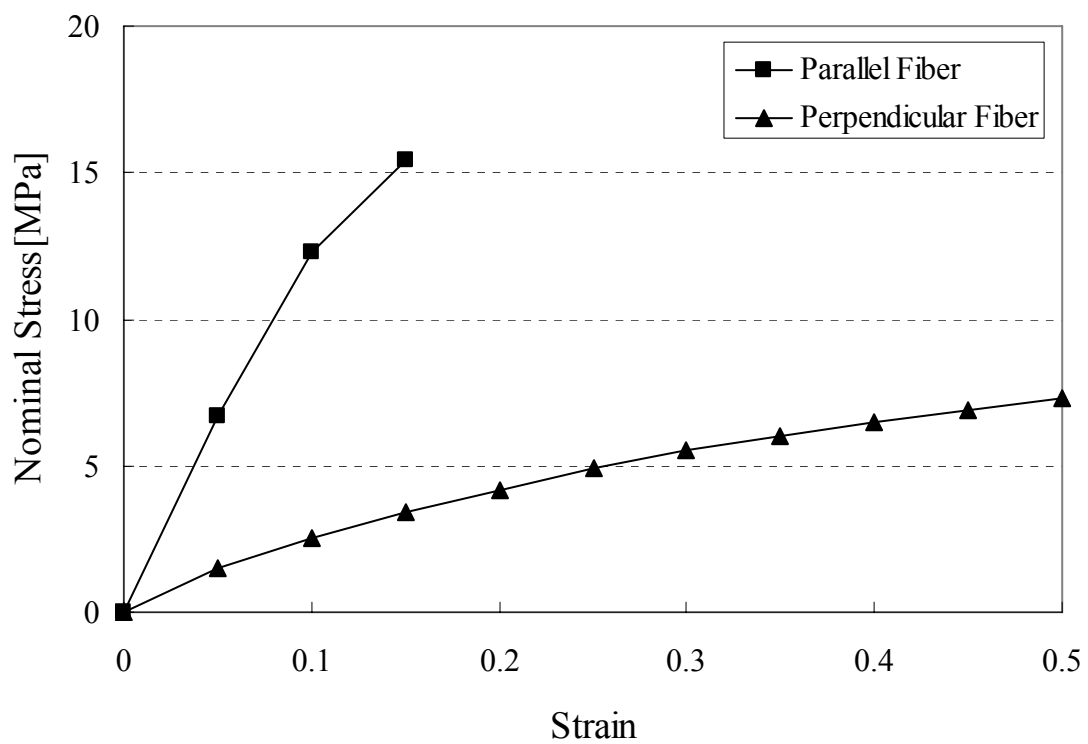


図 3.11 単軸試験結果 (引張側)

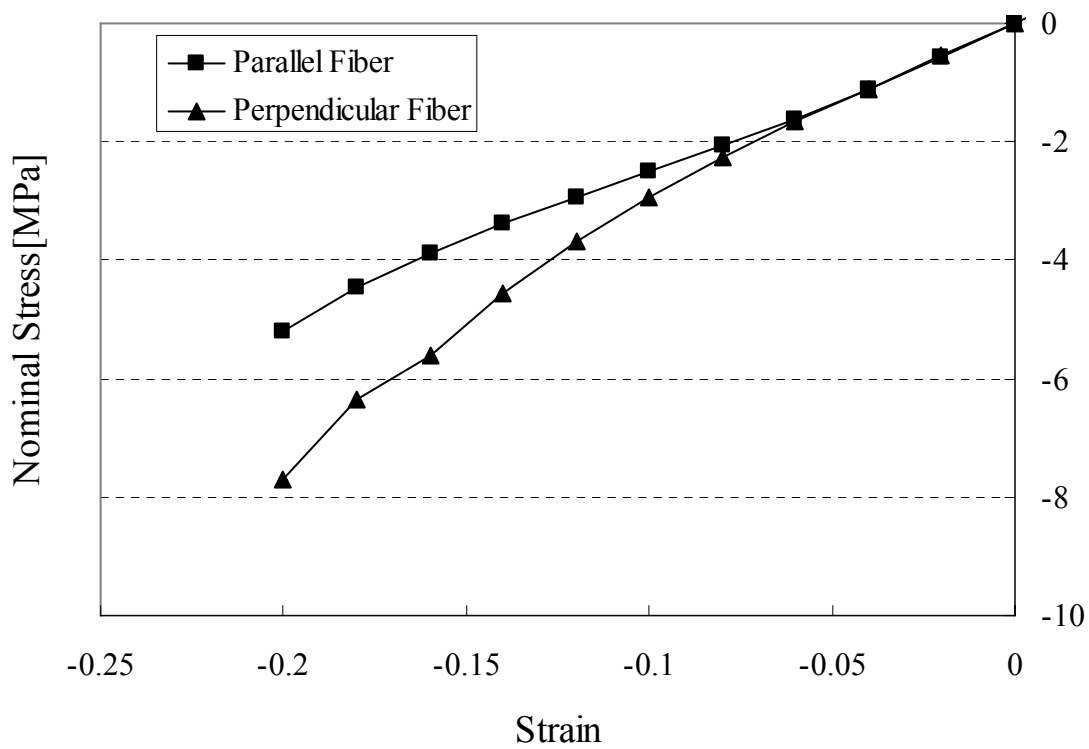


図 3.12 単軸試験結果 (圧縮側)

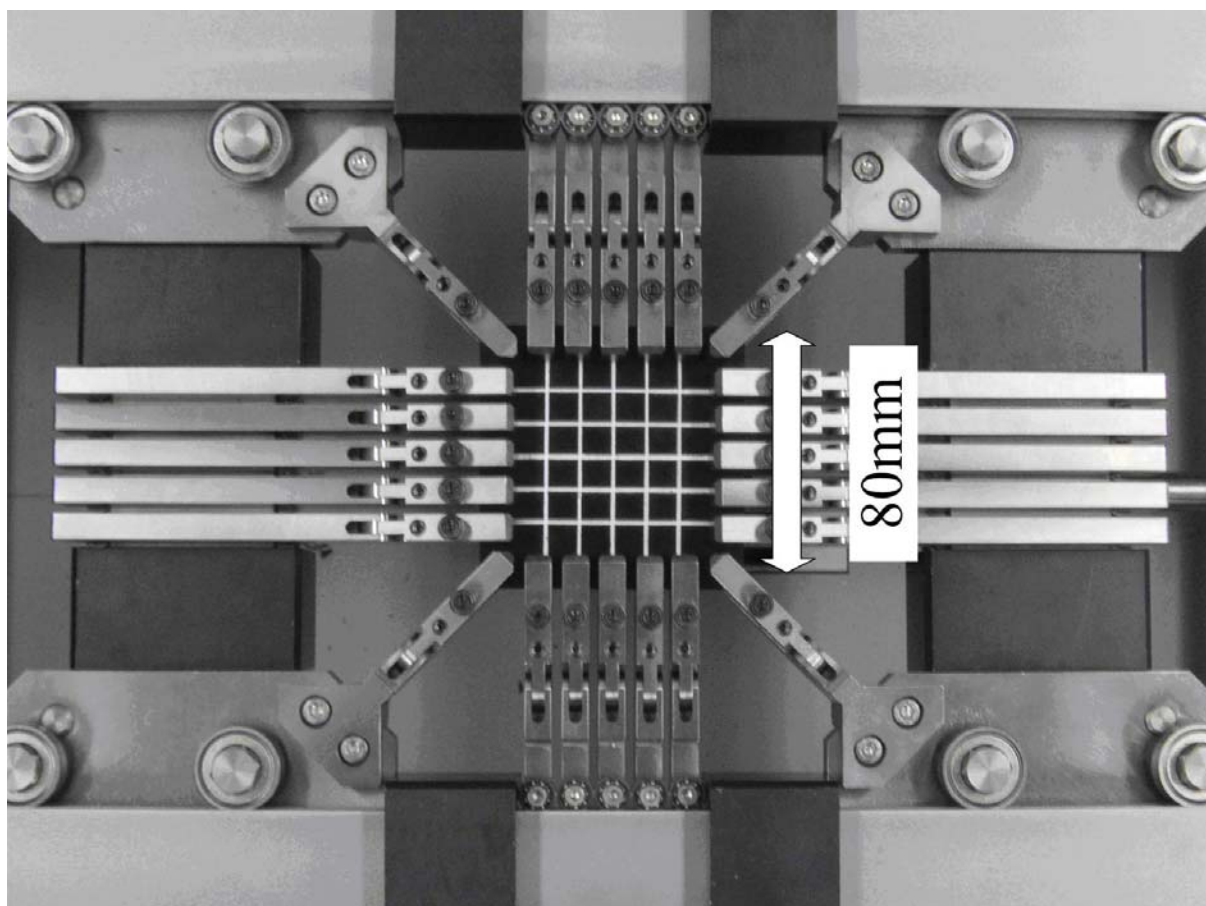


図 3.13 二軸引張試験機

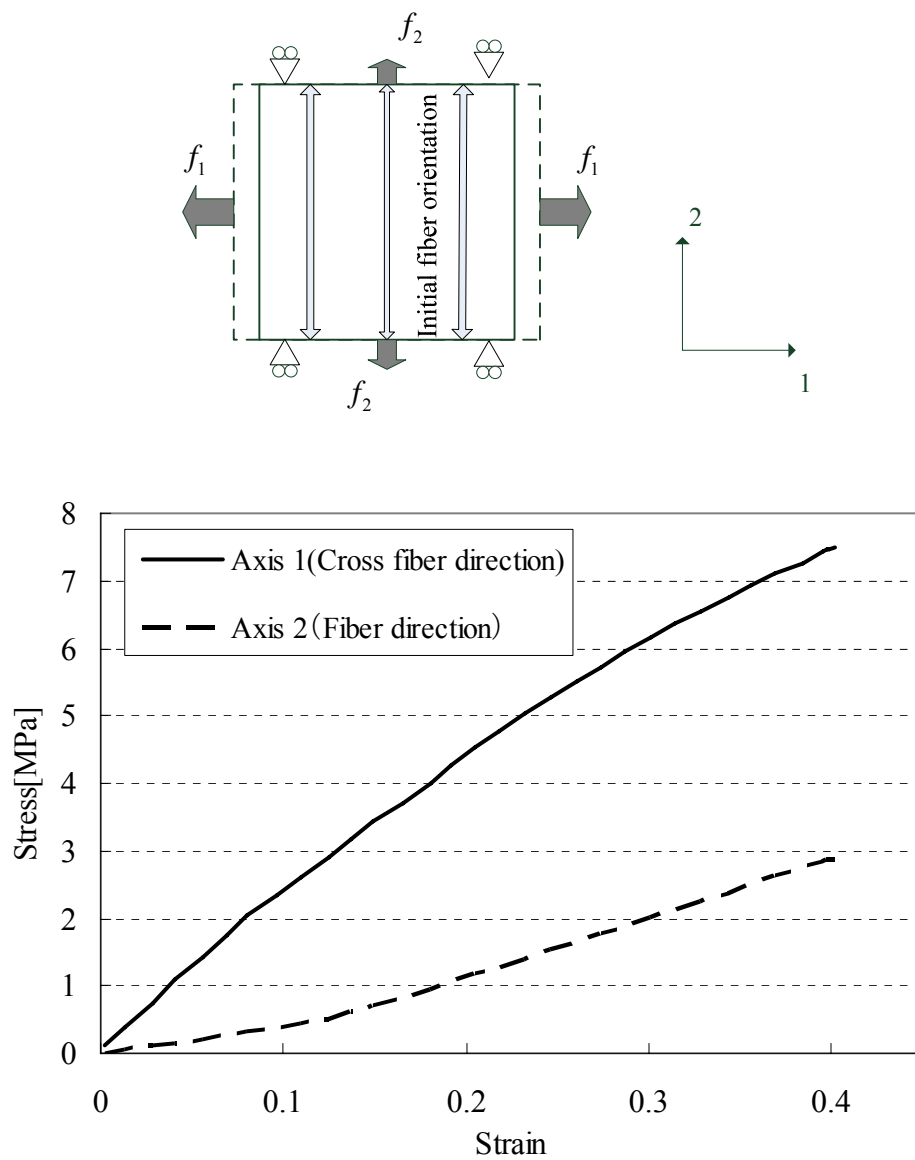


図 3.14 一軸拘束二軸引張試験結果（繊維方向拘束）

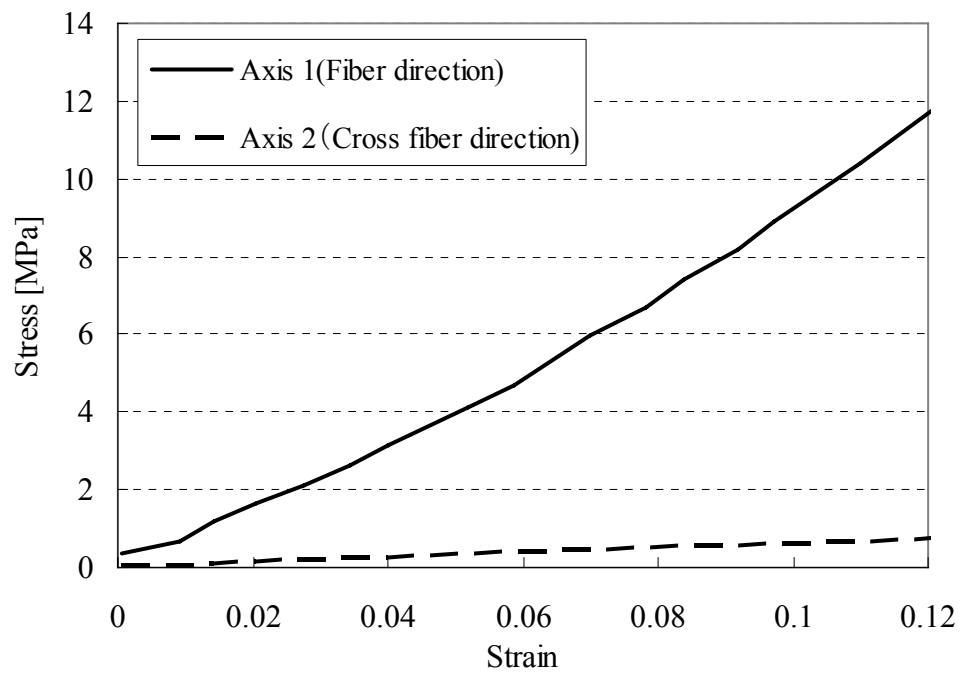
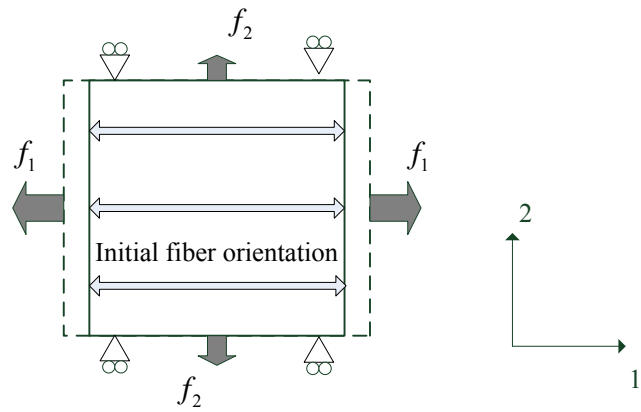


図 3.15 一軸拘束二軸引張試験結果（繊維方向引張）

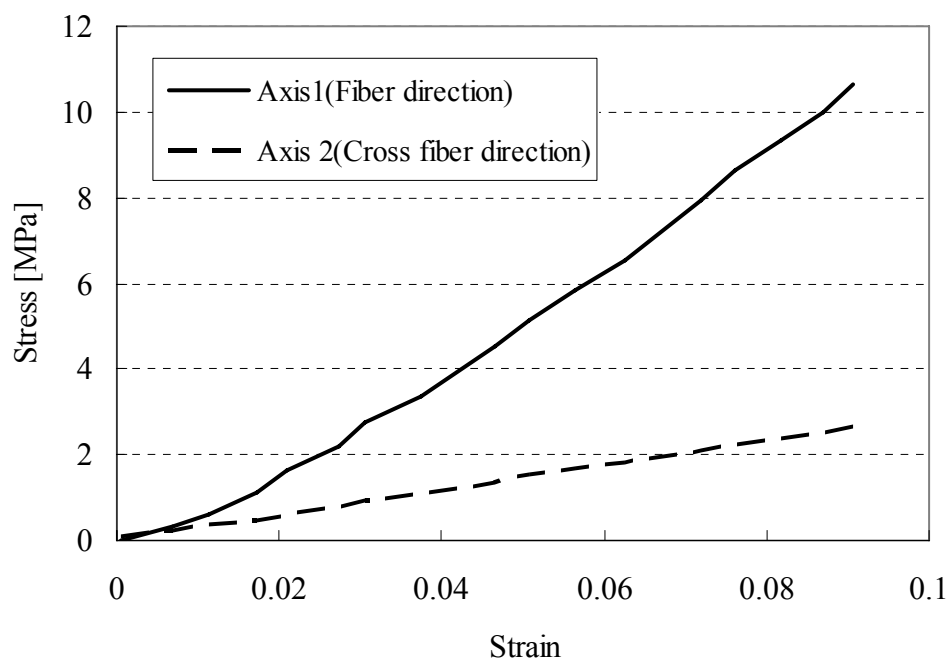
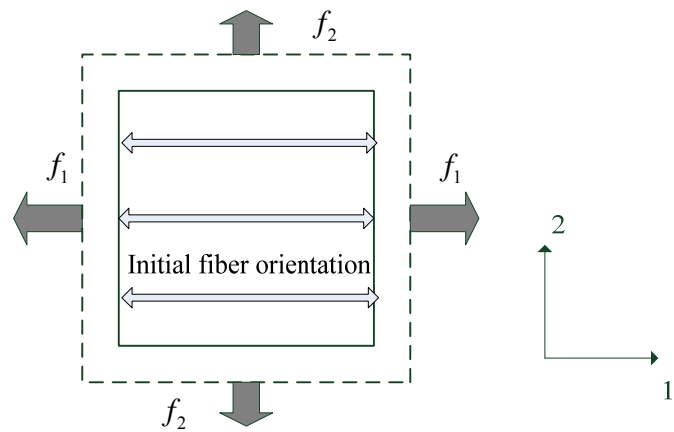


図 3.16 二軸均等引張試験結果

3.3.3. 物性値の同定と有限要素法解析

図 3.11 に示す引張側の単軸試験結果と 図 3.12 に示す圧縮側の単軸試験結果および 図 3.14 に示す繊維方向を拘束した一軸拘束二軸引張試験結果を用いて、本手法による材料物性値を同定した。算出した物性値を表 3.2 に示す。

汎用有限要素法コードMSC.Marcにユーザールーチンを用いて、引張場と圧縮場で異なる材料物性値を持つ異方性超弾性体のひずみエネルギー関数を組み込んだ。図 3.17 に示す単位長さを持つ 3 次元六面体ソリッド要素を使用して、単軸試験の模擬解析を行った。図中の点線表示した円筒が繊維配向方向を示す。下側の要素には 1 軸方向が繊維配向となるように、上側の要素には 2 軸方向が繊維配向になるように、異なる配向方向を定義し、1 軸方向に引張および圧縮の強制変位を与えて、応力解析を行った。

3.3.4. 解析結果と考察

配向方向平行の単軸変形下の応力-ひずみ曲線を 図 3.18 に、配向直角方向の単軸変形下の応力-ひずみ曲線を 図 3.19 に示す。単軸試験の実験結果を○で、本研究手法によって同定された物性値で数値計算した結果を実線で示す。いずれの配向方向においても引張場・圧縮場において、実験結果と比較して精度の良い数値解が得られている。図 3.18 の繊維平行モデルの挙動においては、特に引張と圧縮の接線剛性の違いが適切にシミュレーションされており、本手法により異方性主軸における単軸試験の応力-ひずみ関係を数値計算で精度良く取り扱えるといえる。しかし、繊維平行モデルでの高ひずみ領域での取り扱いには注意を要する。これは、ひずみが 0.25 の辺りで極値を有しており、ひずみ量が 0.25 以降では応力値が減少する結果となっていることである。この数値計算による応力低下の現象は、繊維平行方向の引張実験においては、0 から 0.15 までの狭いひずみ領域での応力-ひずみ線図を用いて、材料物性値を同定したことに起因する。実際に、引張試験においては、0.2 以上のひずみ量を試験片に与えると材料は破断してしまう。このような数値座屈を伴う材料モデルを、実構造物の解析モデルに適用し、大変形・大ひずみ解析を行うと、収束性が安定せず、解を得られない可能性がある。そのような場合には、引張試験の結果に実測よりも大きなひずみと仮想の応力を持つ点を補助点として追加し、より広いひずみ領域の実験結果として、材料物性値を同定する手法がある。この手法を取ることで、実構造物モデルで発生する数値計算上の不安定性を回避できる場合がある。

表 3.2 材料物性値 (MPa)

| | Tension | Compression |
|----------|---------|--------------|
| C_{10} | 3.6731 | same as left |
| C_{01} | 0.1473 | same as left |
| C_{42} | 12.6329 | 0.8167 |
| C_{43} | -8.7214 | 2.9302 |

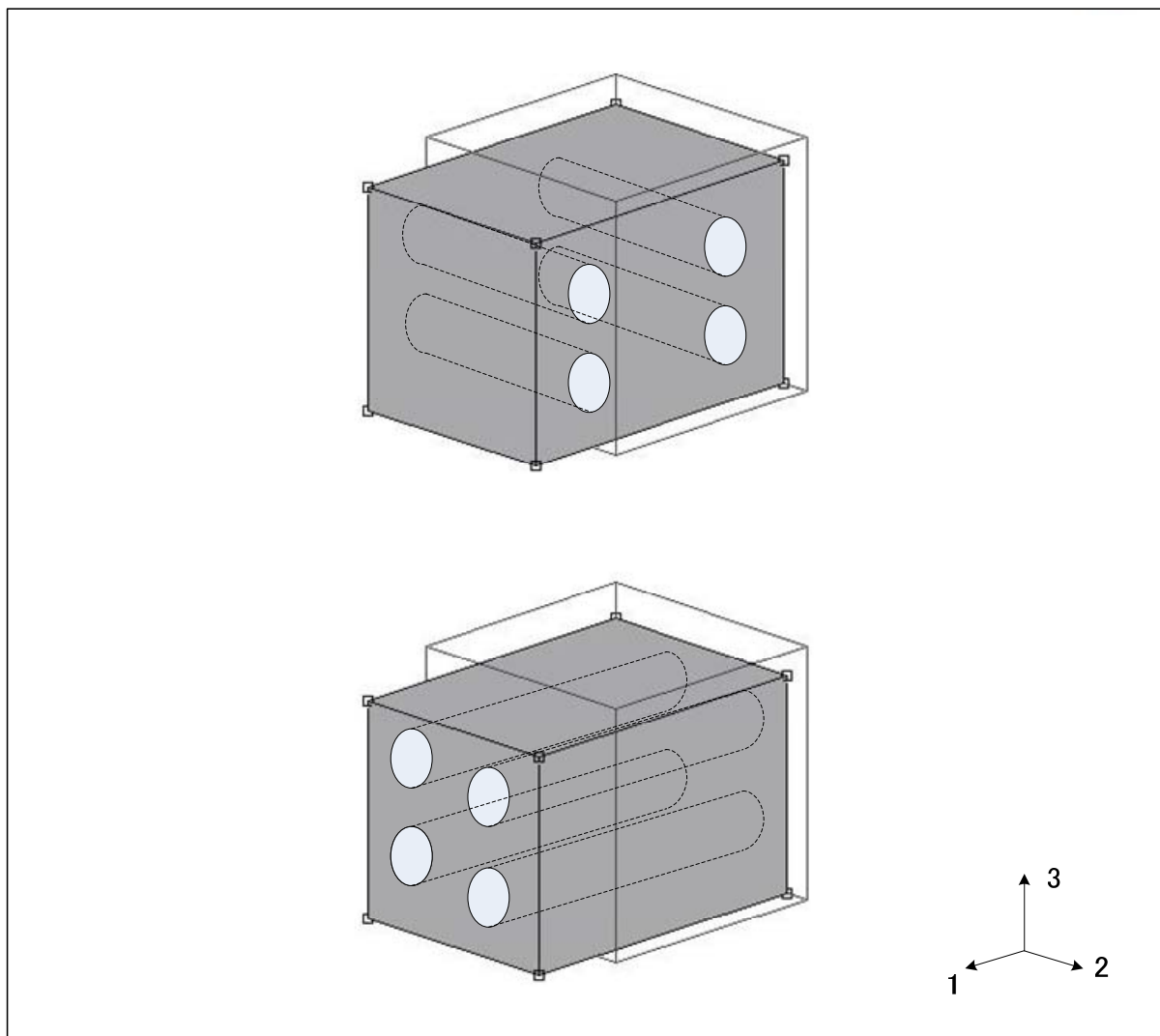


図 3.17 単軸試験有限要素モデル

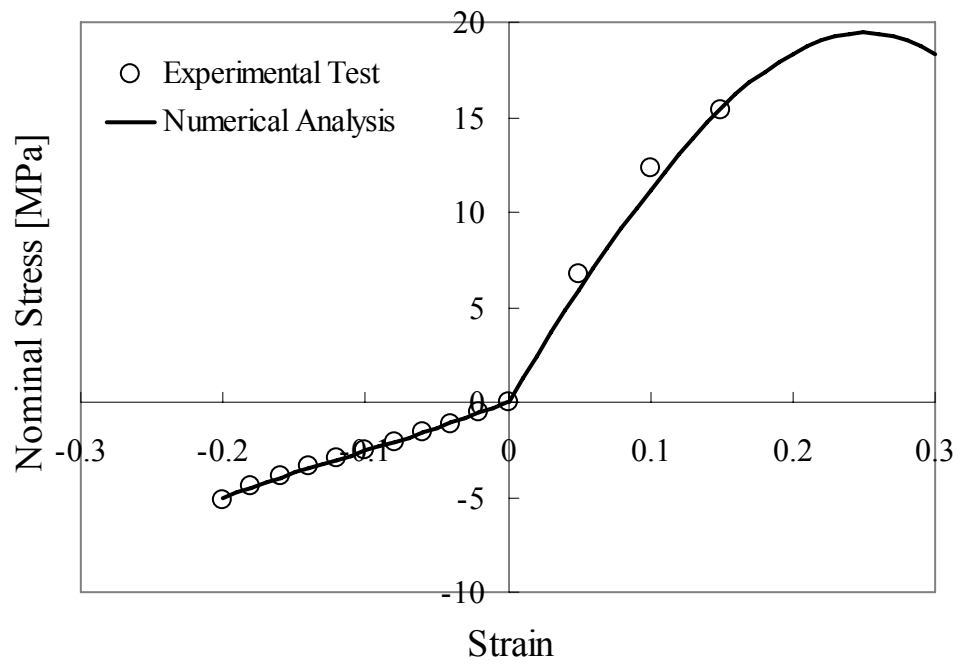


図 3.18 繊維平行モデルの応力ひずみ曲線

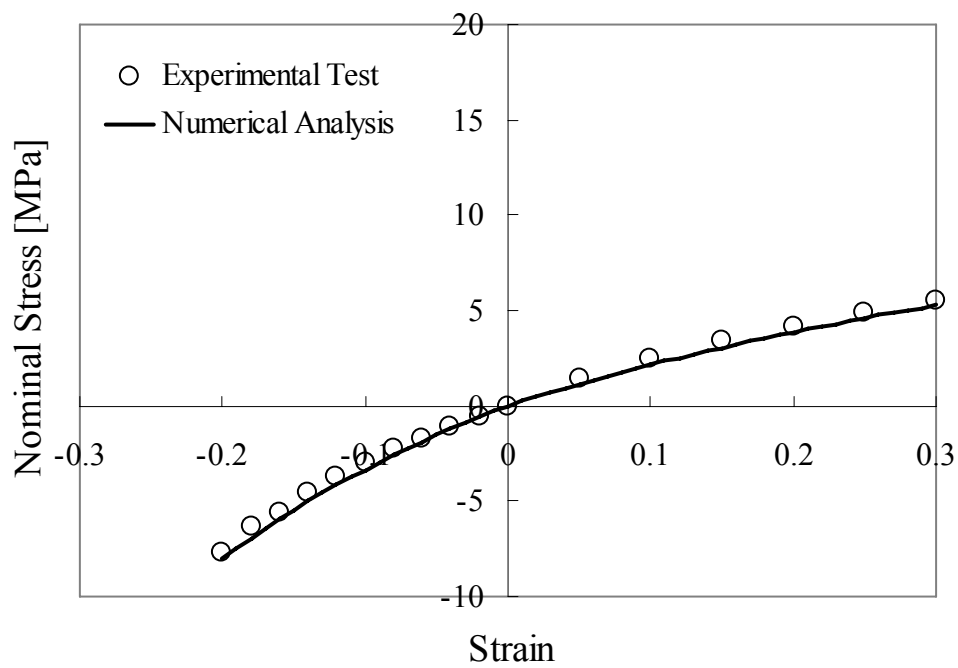
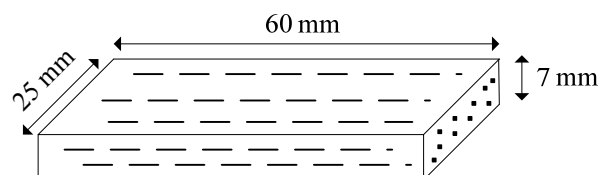


図 3.19 繊維直角モデルの応力ひずみ曲線

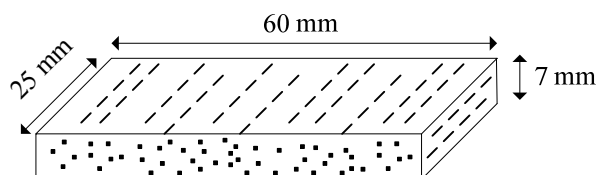
3.4. 曲げ変形での検証

3.4.1. 曲げ試験概要

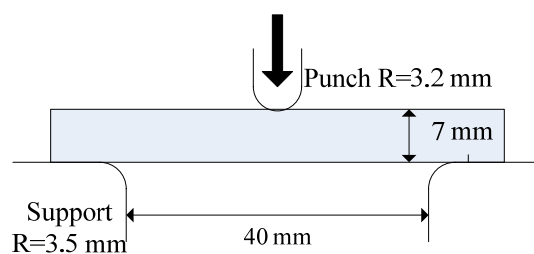
Vベルトは実用上、曲げ変形が支配的となる．多軸場での挙動を確認するため，ここでは単軸試験と同じ物性値を持つゴム材料試験片にて曲げ試験を行い，同じ条件を有限要素法で解析を行い，現実的な使用条件の元での精度の検証を行う．曲げ試験片の模式図を図 3.20(a)(b)に示す．試験片の大きさは幅 25mm，厚さ 7mm，長さ 60mmとし，圧延成形されたゴム材料から繊維方向の異なる 2 種類の試験片を切り出した．図 3.20(a)(b)の各試験片での破線が繊維方向を示す．以下，図 3.20(a)に示すナイロン短繊維の配向方向が試験片長手方向となるモデルを長手モデルと称し，図 3.20(b)に示す配向方向が試験片幅方向となるモデルを幅モデルと称す．図 3.20(c)に示すように，試験片は，コーナーが半径 3.5mmのフィレットを持つ指示部で指示間距離が 40mmとなるように両側を指示され，半径 3.2mmの半円で構成された圧子で中央が押すことにより，曲げ変形を与えることができる．単軸試験と同様に，測定機器には島津製作所製 50kNオートグラフを用いた．また，試験の際には，いずれもシリコン潤滑剤を添付し，摩擦を低減した．



(a) Longitudinal direction model



(b) Lateral direction model



(c) Concise figure of bending test

図 3.20 曲げ試験概要

3.4.2. 有限要素解析

有限要素モデルを図 3.21 に示す．対称性を利用して 1/4 モデルとした．試験片の有限要素モデルは 3 次元ソリッド要素を用いてモデル化した．要素数は 900 個，節点数は 1302 個である．圧子と支持部は剛体サーフェスを定義し，試験片の有限要素モデルとそれぞれの剛体が接触する条件を与えた．実験においては，シリコン潤滑剤により摩擦の影響がないようにしていることから，解析においても摩擦係数は 0 とした．また，材料モデルは前節で導出したひずみエネルギー関数と同じ物性値を使用した．

3.4.3. 解析結果と考察

長手モデルと幅モデルのそれぞれの長手方向のひずみ分布を図 3.22，図 3.23 に示す．圧子周辺では試験片上部に圧縮状態となり，下部側で引張状態となる．図 3.22 に示す長手モデルでの引張側の最大ひずみは 0.137 であり，図 3.23 に示す幅モデルの引張側の最大ひずみ 0.222 よりも小さい値となっており，長手方向に繊維強化されている特徴が捉えられている．一方，図 3.22 で示す長手モデルの圧縮ひずみは -0.325 であり，図 3.23 に示す幅モデルの圧縮ひずみ -0.225 に比べて大きな値が得られている．これは図 3.12 の圧縮側単軸試験結果からわかるように，長手方向の圧縮側剛性が小さい特性と一致した結果であるといえる．図 3.24，図 3.25 に，圧子を表現する剛体サーフェスの反力の計算結果を実線で，実験結果を□で示す．長手モデルでは曲げ挙動により試験片下部で引張場が形成されるため試験・計算結果とも幅モデルよりも大きな負荷が必要となることが明らかである．

図 3.24 に示す長手モデルでは試験結果と計算結果に大きな差が見られるが，この要因として摩擦の影響が考えられる．実験ではシリコン潤滑剤で摩擦を低減する処置を取っているが，繊維配向の強い剛性の影響により滑りが発生せず，局所的な力の増大が実験結果として表れていると考えられる．また，長手モデルでの実験結果にもばらつきがあったため，定量的な議論を行うには実験精度を上げる必要がある．また，基本となるひずみエネルギー関数は Mooney-Rivlin の 2 項モデルであるのでその項数を増やす事で，あるいはより数学的な Ogden モデルを基本のひずみエネルギー関数とすることで，改善できる可能性があると考えられる．さらに，図 3.22 に示す長手モデルの曲げ変形は，配向主軸に対するせん断変形の寄与が考えられるので，図 3.15 に示す繊維方向を引っ張る一軸拘束二軸引張試験の結果に合わせる手法を導くことで，より精度を改善できる可能性もあると考えられる．

一方，図 3.25 に示す幅モデルは実用的な使用条件下であり，実験結果にもばらつきは少なく，その曲げ挙動においては非常に精度良く特性を捉えている．

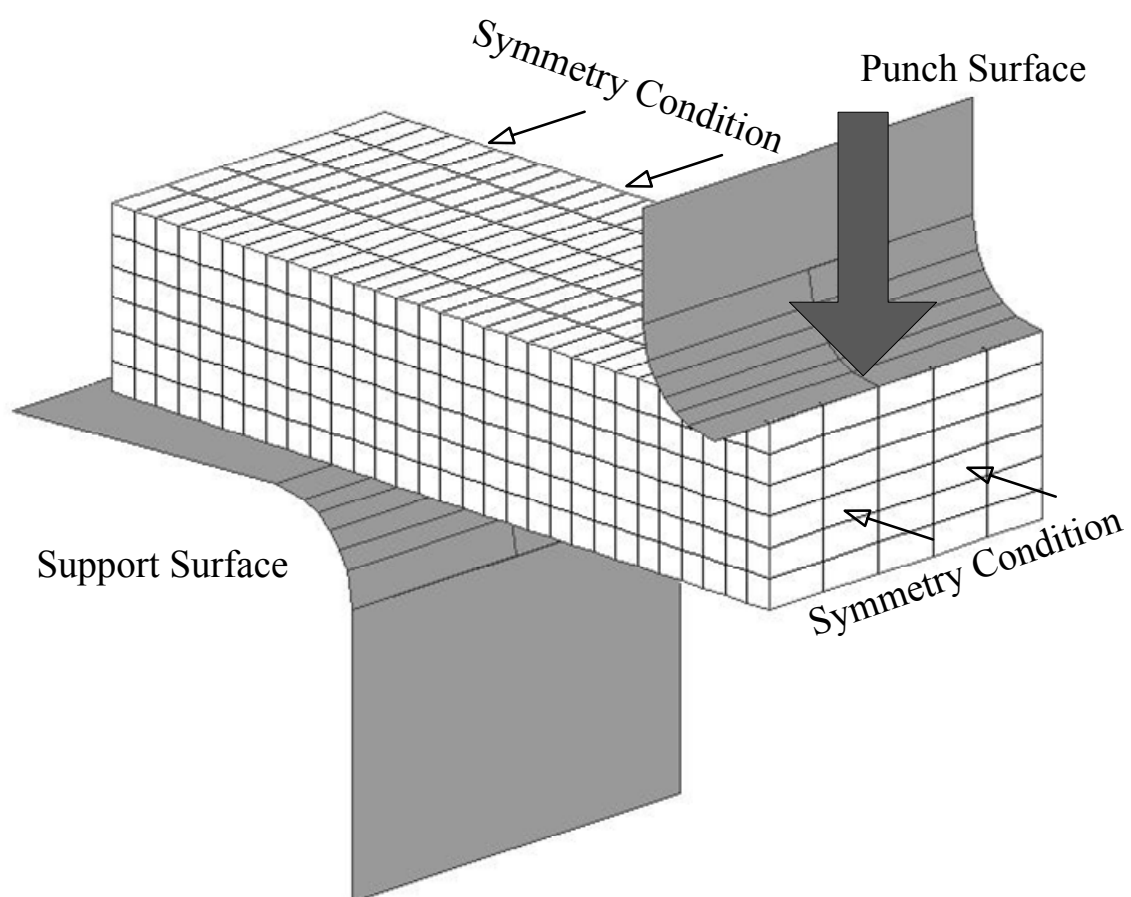


図 3.21 接触条件を適用した曲げ試験の有限要素モデル

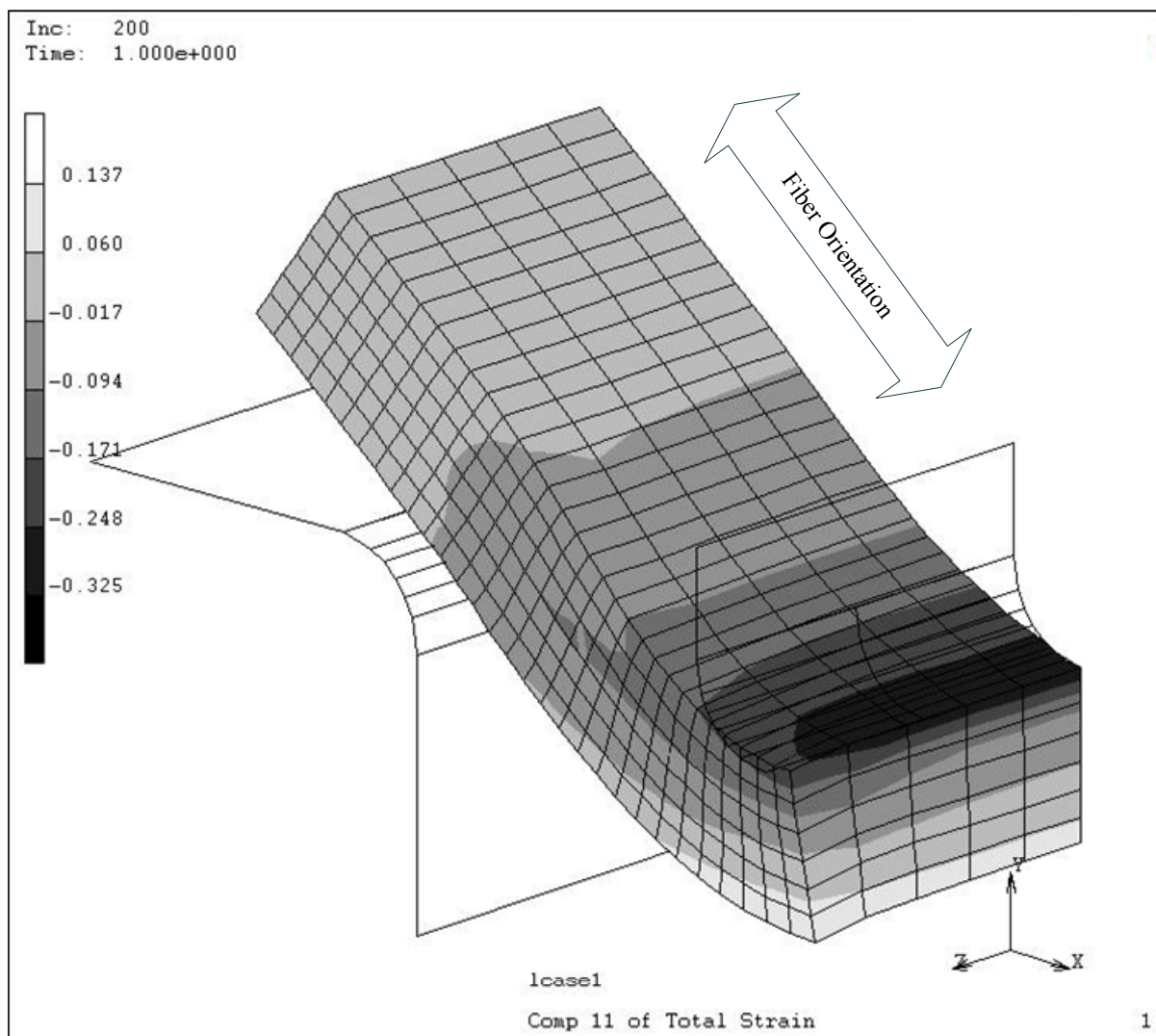


図 3.22 長手モデルのひずみ分布

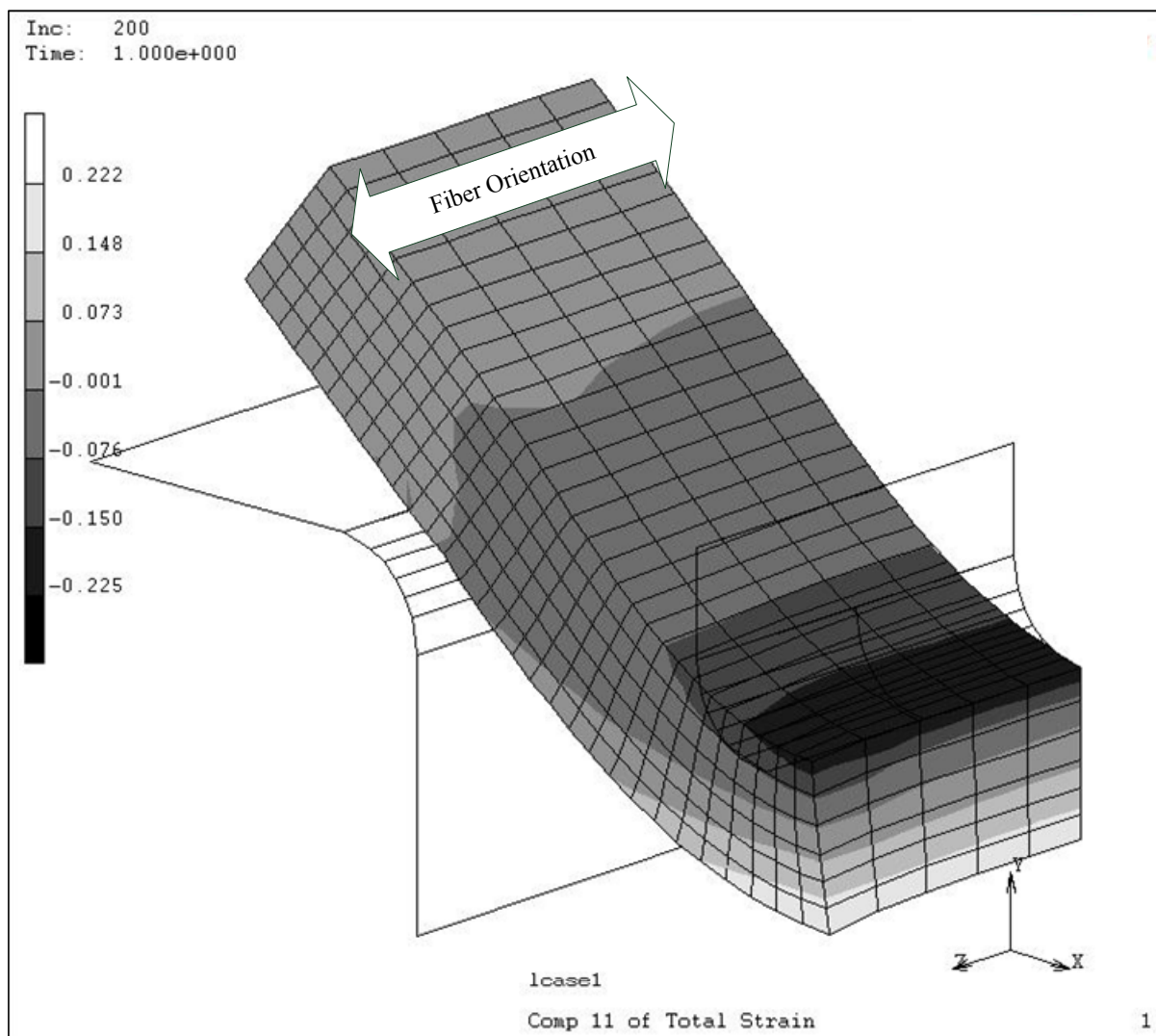


図 3.23 幅モデルのひずみ分布

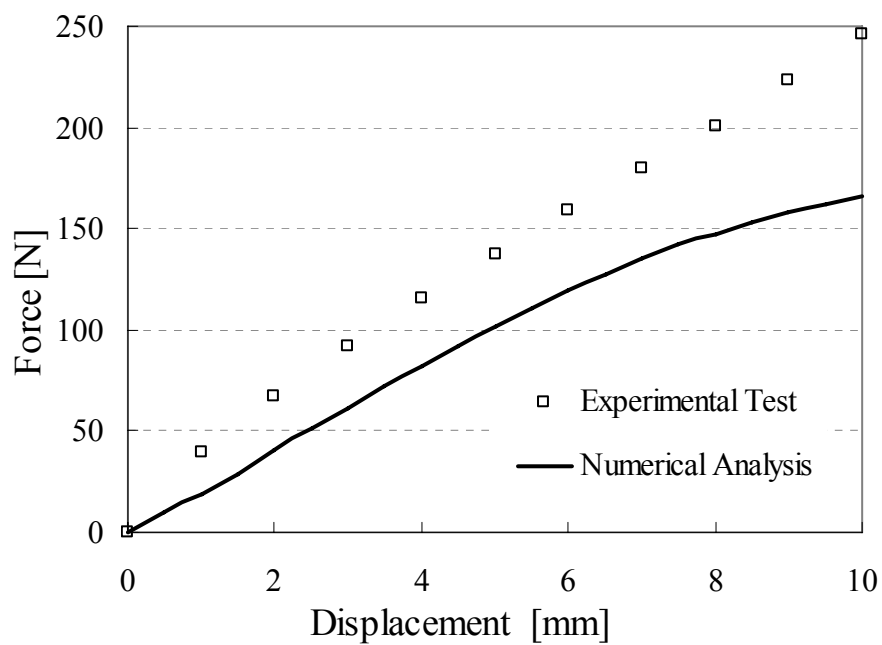


図 3.24 荷重－変位曲線（長手モデル）

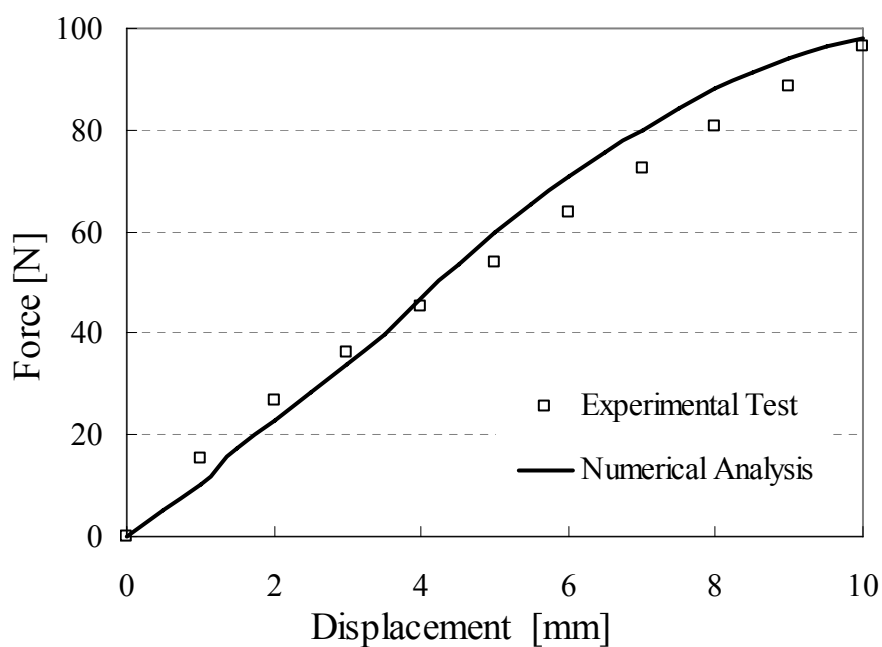


図 3.25 荷重－変位曲線（幅モデル）

3.5. 結論

短繊維強化されたゴムの異方性特性を含めた数値シミュレーションを行うために、異方性のひずみエネルギー関数を導出し、その材料物性値同定手法を確立した。横等方性の超弾性体の強い非線形性を満足するために、単軸試験と一軸拘束二軸引張試験の実験結果を組み合わせ、物性値を同定する手法を導き、引張側と圧縮側で異なる材料物性値を適用した。この同定手法を用いることで、配向方向ならびに配向方向直角の二つの実験曲線を満足でき、より精度の高い数値計算モデルの有効性を示した。曲げ変形の試験においては、長手方向にナイロン短繊維を配向した長手モデルでは実験結果にばらつきがあり、その変形モードを模擬する有限要素解析結果にも差が見られた。その差を改善するには、基本のひずみエネルギー関数の修正や多軸場での実験に物性値を合わせることが考えられる。しかし、本手法で導出したひずみエネルギー関数と材料物性値同定手法を用いることで、実稼働状況に近い幅モデルでの曲げ変形特性を非常に精度よく捉えることができ、その有効性を示した。

スカラー量であるひずみエネルギー関数を用いて材料挙動を取り扱う超弾性体では、様々な変形モードにおける3次元的な曲面を正しく取り扱うために、多軸試験の必要性があることは多く論じられており [23][46], 異方性材料の超弾性体材料の材料物性値の同定する場合においても必要であることが示された。なお、二軸均等引張試験の応力理論解とその結果から同定することにより、さらに精度の良い解を得ることが可能であると考えられる。

また、多項式によるひずみエネルギー関数では異方性の材料パラメータの値により、数値計算上の座屈現象が発生することを示した。この数値座屈を防ぐ意味でも、引張と圧縮で異なる物性値を取り扱える本手法が有効であるといえる。本手法により精度良く、収束性の良い安定した数値計算が行えた。

V ベルトなどの実モデルでは異方性超弾性体の他に帆布や心線の影響があり、そのメカニズムを特定するには容易ではない。しかし、本研究ではその構造の大部分を占める異方性超弾性体の特性を把握でき、数値計算手法を確立できた。本研究成果は、伝動ベルト以外の他の構造物における異方性ゴム材料や心筋細胞などの生体材料の特性を解明するための数値計算にも十分適用可能であると結論づけられる。

第4章 磁性エラストマーの超弾性構成則

4.1. 磁性エラストマー

高分子材料であるエラストマーに磁性粒子を混練して成形された磁性エラストマーは、粒子複合材料であり、機能性材料として工業的に自動車・宇宙・医療産業などの様々な分野で応用され、近年、脚光を浴びている。エラストマーとは常温でゴム状弾性を有する高分子材料のことであり、比較的小さな力で大きな伸びを得ることができ、材料の破断に至るまでの変形が大きい。さらにエラストマーはその大きな変形を受けても、可逆的に元に戻ることができるという金属にはない性質を持ち、応力とひずみの関係は非線形弾性の挙動を取ることで、その特長を活かした工業的役割は大きく、タイヤ、免震構造物、シール材、医療用機器、人工臓器などの様々な分野で使用されている [17]。このようなエラストマー中に配合された磁性粒子が、磁場中に置かれた場合、個々の磁性粒子は外部磁場及び他の粒子が外部磁場により磁化することで生じる磁場の影響を受ける。そして、その磁性粒子のモーメントによるエネルギー変化がエラストマーの機械的な剛性変化に大きな影響を及ぼす。磁場の変化は瞬時に行えるので、磁性エラストマーの機械的な剛性変化の制御も瞬時に行える点が優れた特徴である。同じように電界を変化させることで、材料特性を変化させることのできる誘電材料があるが、誘電材料に比べて、磁性材料は不純物による特性変化に影響を受けにくく、電流損やジュール熱によるエネルギー浪費が少ない利点を持つ。

磁性エラストマーの使用例を図 4.1 に示す [2]。自動車などのサスペンションブッシュは一般に内筒と外筒の間にゴムが装着され、軸方向または半径方向の挙動を制御する目的で使用される。図で示したサスペンションブッシュはゴム部分が通常のコイルではなく、磁性粒子を含有した磁性エラストマーとして機能している。内筒と外筒の間には多重に巻かれたワイヤコイルが配置されており、そのコイルに電流を印可することで磁場を形成し、磁性エラストマーの剛性を変化できる。コイルによる磁場変化は瞬時に行われるので、外部からの振動などを瞬時に吸収・反発できるように機械的特性が制御される。

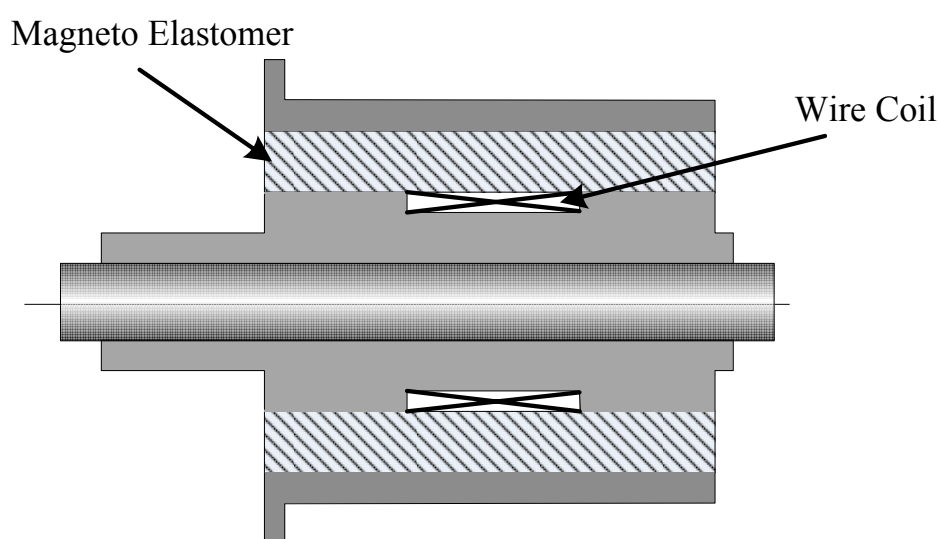


図 4.1 サスペンションブッシュ

このような剛性変化は、マクスウェル応力の効果によって実現される。磁性粒子を含む磁性エラストマーが磁場中に置かれた場合、個々の磁性粒子は外部磁場及び他の粒子が外部磁場により磁化することで生じる磁場の影響を受ける。相互に磁化した粒子は互いに反発または引き合う。この作用力はマクスウェルの応力 \mathbf{T}_m として、次式で定義できる [47][48]。

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} \quad (4.1)$$

ここで、 \mathbf{B} は磁束密度であり、 \mathbf{H} は磁場の強さであり、 \mathbf{U} は電磁エネルギー密度である。物質中の透磁率 μ と磁化 \mathbf{M} の間には

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4.2)$$

の関係がある。このマクスウェル応力は物体力としてエラストマーに作用する。

マクスウェル応力の影響を受けないエラストマーを数値計算で解析する場合、その機械的挙動はひずみエネルギー関数を用いて、応力-ひずみ関係が求められる。しかし、磁性エラストマーのように、外部磁場によるマクスウェル応力が存在するとき、そのひずみエネルギー関数には磁場の影響を含めたひずみエネルギー関数として構成則を導出する必要がある。一般に、磁性粒子を含む材料が磁場中に置かれた場合、磁性粒子はその粒子が置かれた磁場の作用により回転する。すなわち、粒子は他の粒子との接触による回転・並進作用力を受けるのみならず、磁場により回転する。この結果、粒子の集合体を連続体としてとらえた場合、内部のせん断ひずみは反対称成分を持つ。Koteraら [49] は粉体の磁場中の粒子挙動を求めるために、偶応力による反対称の応力テンソルを取り入れることで、弾性体内での局所回転を考慮することを可能とし、磁性粉体の磁場中成形時の粒子配向挙動を明らかにした。しかし、本研究においては成形後の磁性エラストマーが外部磁場中にあり、大変形下における機械的な剛性変化を明らかにすることを対象としており、変形時ならびに外部磁場の影響による磁性粒子の局所回転は非常に微小であると想定し、反対称成分は考慮しない。

本章では、対称性の仮定の下で外部磁場中の磁性エラストマーの超弾性構成則を導出するために、磁性エラストマーを連続体として捉えたときの連続体の運動、磁場の平衡方程式、機械的な平衡方程式、材料の非圧縮性の取り扱いについて論じ、不変量に基づく超弾性構成則を導出する。

4.2. 磁性エラストマーの超弾性構成則の導出

はじめに、連続体の運動について考える。磁性エラストマーが初期空間 \mathcal{B}_0 に位置していると考ええる。初期配置における外部磁場の強さを \mathbf{H}_0 としたとき、材料内部の磁束密度を \mathbf{B}_0 、磁化を \mathbf{M}_0 とする。一般的に磁性体に対して磁場を適用すると機械的な外力を与えずとも、初期の自然状態からある変形が発生する。この磁場による初期変位は磁歪と呼び、連続体内の変形がないとすれば、磁束密度 \mathbf{B}_0 を変数とする残留応力として初期空間 \mathcal{B}_0 で与えられる。本研究では、既に磁歪が含まれた状態として初期空間 \mathcal{B}_0 を参照座標系として取り扱い、初期応力は考慮しない。初期空間における参照座標系 \mathcal{B}_0 での物体の任意の一点を \mathbf{X} とする。その物体が何らかの機械的な外力により変形したとき、現配置 \mathcal{B} での変形後の位置を \mathbf{x} とすれば、線形写像 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$ を用いて表すことができる。

この変形ベクトル場 χ は物体の変形を表し，変形勾配テンソルはその勾配を取って

$$\mathbf{F} = \text{grad} \chi \quad (4.3)$$

で表される．

次に，磁場の平衡方程式を考える．物質に変形がない状態 ($\mathbf{F} = \mathbf{I}$) での磁場に関する方程式は

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 (\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0) \quad (4.4)$$

である．ここで， μ_0 は真空の透磁率である．物質の外部であれば $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$ であるので，式 (4.4) は $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ となる．参照座標系においては磁束密度と磁場の強さは静的なマクスウェル方程式の基で

$$\text{div} \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

を満足しなければならない．

次に，変形勾配テンソル \mathbf{F} で変形した場合の物質点 \mathcal{B} での磁場の量をそれぞれ \mathbf{B}_f ， \mathbf{H}_f ， \mathbf{M}_f と

定義する．(添字の f は forward を意味する) これらはオイラー空間でのベクトル量であり，初期配置 \mathcal{B}_0 から現配置 \mathcal{B} へ投影 (push forward) することで得られる．ここで変形前後の関係はストークスの公式を用いて，

$$\mathbf{B}_f = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{B}_0 \quad (4.7)$$

$$\mathbf{H}_f = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{H}_0 \quad (4.8)$$

となる．また，変形前後の関係から

$$\text{div} \mathbf{B}_0 = J \text{div} \mathbf{B}_f \quad (4.9)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}_0 = J \mathbf{F}^{-1} \text{rot} \mathbf{H}_f \quad (4.10)$$

である．ここで $J = \det \mathbf{F}$ は体積変化率を表す．一方，変形後においてもマクスウェル方程式を満足しなければいけないので，

$$\text{div} \mathbf{B}_f = 0 \quad (4.11)$$

$$\text{rot} \mathbf{H}_f = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

である．

式 (4.8) に示すオイラー空間での磁場の強さ \mathbf{H}_f と同様に，オイラー空間での磁化 \mathbf{M}_f と初期配置の磁化 \mathbf{M}_0 の間には

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{M}_0 \quad (4.13)$$

の関係が成り立つので，式 (4.7) は

$$\mathbf{B}_f = \mu_0 J^{-1} \mathbf{b} (\mathbf{H}_f + \mathbf{M}_f) \quad (4.14)$$

となる．ここで $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ は左コーシー・グリーン変形テンソルである．重要な点として現配置においては $J^{-1}\mathbf{b}$ が磁束密度と磁場の関係式に乘数として現れている．式 (4.14) はオイラー空間における変形後の磁場の平衡方程式となる．

そして，変形後の配置 \mathcal{B} における，磁場の強さ \mathbf{H} と磁束密度 \mathbf{B} ならびに磁化 \mathbf{M} の関係を求める．

式(4.4)に共役な形で，

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4.15)$$

と表すことができる．オイラー空間においてもマクスウェル方程式を満足する必要があるので，式(4.5)(4.6)と等価な形式として

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (4.16)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad (4.17)$$

となる．

ここで，現配置 \mathcal{B} から基準配置（初期配置） \mathcal{B}_0 へ戻す（pull back）操作を考える．基準配置における物質点 \mathcal{B}_0 の磁場に関する量を \mathbf{B}_l ， \mathbf{H}_l ， \mathbf{M}_l と定義する．（添字の l は Lagrange を意味する）これらはラグランジェ空間でのベクトル量であり，変形前後の関係は

$$\mathbf{B}_l = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{H}_l = \mathbf{F}^T \mathbf{H} \quad (4.19)$$

である． \mathbf{H}_l と同様に磁化については

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{F}^T \mathbf{M} \quad (4.20)$$

の関係が成り立つので，式(4.15)は

$$J^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}_l = \mu_0 (\mathbf{H}_l + \mathbf{M}_l) \quad (4.21)$$

となる．ここで $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ は右コーシー・グリーン変形テンソルであり，式(4.21)はラグランジェ空間における変形前の磁場の平衡方程式となる．

次に，機械的な平衡方程式を求める．機械的な体積力が存在しない場合，オイラー空間での釣り合い方程式は

$$\text{div } \mathbf{T} = 0 \quad (4.22)$$

である．式(4.22)での \mathbf{T} は全真応力テンソルであり，機械的な応力テンソルと磁場によって発生する応力テンソルの総和を意味する．また，変形後の座標系における応力である．

全真応力に対応する公称応力テンソル \mathbf{P} は弾性理論 [49] から

$$\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T} \quad (4.23)$$

となる．機械的な体積力が存在しない場合，ラグランジェ空間での応力の釣り合い方程式は

$$\text{div } \mathbf{P} = 0 \quad (4.24)$$

である。

これらの磁場的な平衡方程式と機械的な平衡方程式の下で、機械的な力と磁場による力を受ける物質が等温変化の条件下で変形した場合、自由エネルギーは変形を示す変数と磁場に関する変数の二つを独立変数として持つ。ここでは自由エネルギーの独立変数を変形勾配テンソル \mathbf{F} と磁束密度 \mathbf{B} を用いて定式化していくこととする。すなわち、自由エネルギーの関数 Ω を

$$\Omega = \Omega(\mathbf{F}, \mathbf{B}) \quad (4.25)$$

と表すこととする。ここで、式(4.18)の現配置の磁束密度 \mathbf{B} とラグランジェ空間での磁束密度 \mathbf{B}_l の関係から、ラグランジェ空間での自由エネルギー Ψ を定義すると、次式となる。

$$\Psi(\mathbf{F}, \mathbf{B}_l) \equiv \Omega(\mathbf{F}, J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{B}_l) \quad (4.26)$$

さらに、自由エネルギー Ψ を機械的な自由エネルギー Ψ_{mech} と磁場の自由エネルギー Ψ_{mag} に分解するとラグランジェ空間での自由エネルギー Ψ は

$$\Psi(\mathbf{F}, \mathbf{B}_l) = \Psi_{\text{mech}}(\mathbf{F}) + \Psi_{\text{mag}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_l) \quad (4.27)$$

となる。式(4.27)において、自由エネルギー Ψ は変形勾配テンソル \mathbf{F} の代わりに、右コーシー・グリーン変形テンソル $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ を用いて表記することも可能である。

次に、圧縮性を含めた材料内での応力テンソルを求める。電場を考慮せず、磁場のみを考慮したときマクスウェル応力 \mathbf{T}_m は磁束密度 \mathbf{B} と磁場の強さ \mathbf{H} から次式となる。

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{B} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} \quad (4.28)$$

ここで、右辺第2項は電磁エネルギー密度である。電磁的に線形な材料の場合、真空の透磁率 μ_0 を用いて、式(4.28)は

$$\mathbf{T}_m = \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{I} \right] \quad (4.29)$$

であり、磁場の自由エネルギー Ψ_{mag} を

$$\Psi_{\text{mag}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_l) = \frac{1}{2} \mu_0^{-1} J^{-1} \mathbf{B}_l \cdot (\mathbf{C} \mathbf{B}_l) \quad (4.30)$$

と仮定したとき、

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{F} \frac{\partial \Psi_{\text{mag}}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{I} \right] \quad (4.31)$$

となり、式(4.29)に一致する。

従って機械的な応力も含めた全真応力は自由エネルギーを用いて

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \frac{\partial \Psi_{\text{mech}}}{\partial \mathbf{F}} + \mathbf{F} \frac{\partial \Psi_{\text{mag}}}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.32)$$

となる。

式(4.32)と式(4.23)の定義から、機械的な応力と磁場による応力の総和としての公称応力 \mathbf{P} を得る

ことができる。

物質外では機械的な力は存在しないので、 $\Psi_{\text{mech}} = 0$ かつ、 $\mathbf{M}_l = \mathbf{0}$ であることから、式(4.32)は

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{I} \right] \quad (4.33)$$

となり、真空中でのマクスウェル応力に一致する。すなわち、式(4.32)は応力テンソルを機械的な応力と磁場による応力テンソルに分解して取り扱うことができることから、物質内と物質外において、それぞれの場を計算することで、効率よく全応力場を得ることができることがわかる。

結果として、式(4.27)のエネルギー関数を用いることにより、全真応力 \mathbf{T} および公称応力 \mathbf{P} は

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.35)$$

となる。この自由エネルギーの変数は変形勾配テンソルと磁束密度であることから、磁場の強さは

$$\mathbf{H}_l = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_l} \quad (4.36)$$

で得られる。

機械的な外力による変形がない初期状態では $\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_0$ とできるので、自由エネルギーは

$$\Psi_0(\mathbf{B}_0) = \Psi_0(\mathbf{I}, \mathbf{B}_0) \quad (4.37)$$

とできることから、磁場の強さは

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \mathbf{B}_0} \quad (4.38)$$

となる。また、磁化 \mathbf{M}_0 は式(4.4)より得られる。

次に、材料が非圧縮の特性を取る場合を考える。非圧縮性材料では体積変化がないのですべての変形勾配テンソルに関して

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \quad (4.39)$$

であり、式(4.34)の全真応力は

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{I} \quad (4.40)$$

となる。ここで p は非圧縮の拘束条件を満たすためのラグランジェの未定定数であり、静水圧の項を示す。オイラー空間での磁場に関する諸量は

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{B}_l \quad (4.41)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_l} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{M} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{H} \quad (4.43)$$

である。対応する公称応力は

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-1} \quad (4.44)$$

である．一方，ラグランジェ空間での磁場に関する諸量は

$$\mathbf{B}_I \quad (4.45)$$

$$\mathbf{H}_I = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_I} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{M}_I = \mu_0^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}_I - \mathbf{H}_I \quad (4.47)$$

である．式(4.40)の静水圧の項 p は非圧縮性の磁性材料を取り扱うために必要であり，第2章で論じた様に数値解析において非圧縮拘束条件として取り扱われる手法と加算分解により静水圧として取り扱われる手法の二つがある．一方，物質外の真空中での全真応力は式(4.33)で簡易に計算できる．

次に，不変量を基にしたひずみエネルギー関数における磁性エラストマーの応力テンソルの一般形を考える．本研究ではエラストマー中の磁性粒子の回転は非常に微小であるとして，局所回転による非対称性は考慮に入れていないので，自由エネルギー関数ならびにそこから得られる応力テンソルについても対称性の仮定の下で取り扱える．このとき磁場に関する自由エネルギー関数 Ψ_{mag} は式(4.30)の形式を取るので，磁場の自由エネルギー関数の変数は，変形を表す右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} と，初期の磁束密度 \mathbf{B}_I から得られる磁場構造テンソル $\mathbf{B}_I \otimes \mathbf{B}_I$ の二つとなる．この二つの量を変数とすると，ひずみエネルギー関数は

$$\Psi = \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{B}_I \otimes \mathbf{B}_I) \quad (4.48)$$

であり，客観性が失われないためには

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{B}_I \otimes \mathbf{B}_I) = \Psi(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{B}_I \otimes \mathbf{B}_I \mathbf{Q}^T) \quad (4.49)$$

が任意の回転を示す直交テンソル \mathbf{Q} に対して成り立たねばならない．従って，ひずみエネルギー関数 Ψ はSpencerの不変量の理論 [51] から次の6個の不変量を変数として持つ．

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C} \quad (4.50)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr} \mathbf{C} \text{tr} \mathbf{C} - \text{tr} \mathbf{C}^2) \quad (4.51)$$

$$I_3 = \det \mathbf{C} \quad (4.52)$$

$$I_4 = \mathbf{B}_I \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_I = \mathbf{C} : (\mathbf{B}_I \otimes \mathbf{B}_I) \quad (4.53)$$

$$I_5 = \mathbf{B}_I \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{B}_I = \mathbf{C}^2 : (\mathbf{B}_I \otimes \mathbf{B}_I) \quad (4.54)$$

$$I_6 = |\mathbf{B}_I|^2 \quad (4.55)$$

I_1, I_2, I_3 は変形による機械的な不変量であり， I_4, I_5, I_6 は材料内部の磁束密度ベクトルによる不変量である．これらの不変量は第2章で示した，異方性超弾性体の場合と同じ取り扱いを行える．

ただし、異方性超弾性体の場合、繊維配向方向は単位ユニットのベクトル量であるので不変量の数は5つであった。本章で論ずる磁性エラストマーの超弾性体構成則の場合、磁束密度は方向だけでなくその量も重要な変数となるので、6番目の不変量 I_6 が適用される。

最後に、式(4.48)に示す、右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} と磁場構造テンソル $\mathbf{B}_l \otimes \mathbf{B}_l$ を変数とするひずみエネルギー関数における応力テンソルを導出する。第2ピオラ・キルヒホッフ応力テンソル \mathbf{S} は、ひずみエネルギー関数 Ψ を右コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{C} で微分することで応力場が得られるので、微分の連鎖則を用いると、

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{B}_l \otimes \mathbf{B}_l)}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{a=1}^6 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{B}_l \otimes \mathbf{B}_l)}{\partial I_a} \frac{\partial I_a}{\partial \mathbf{C}} \quad (4.56)$$

で得られる。各不変量の微分を行えば

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 & \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{B}_l \otimes \mathbf{B}_l + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{B}_l \otimes \mathbf{C} \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_l \mathbf{C} \otimes \mathbf{B}_l) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

となり、最後の2項が磁場による項となる。ここで \mathbf{I} は2階の単位テンソルである。

そして、非圧縮性の磁性超弾性体を考えたとき、通常の超弾性体と同様に等容性項のひずみエネルギー関数は体積変化を表す I_3 を省いた変数によって定義される。

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_4, I_5, I_6) \quad (4.58)$$

ここで、負の静水圧を p とすると、全真応力は

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = p \mathbf{I} + 2 & \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 \right. \\ & \left. + \mathbf{b} \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{B}_l \otimes \mathbf{B}_l + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{B}_l \otimes \mathbf{b}^2 \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_l \mathbf{b}^2 \otimes \mathbf{B}_l) \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

となり、ひずみエネルギー関数 Ψ の微分項と左コーシー・グリーン変形テンソル \mathbf{b} と初期の磁束密度 \mathbf{B}_l で得ることができる。この式(4.59)の磁性エラストマーの応力テンソル \mathbf{T} は第2章で示した式(2.30)の異方性超弾性体の応力テンソルと等価であり、第2章で導出した異方性超弾性体の接線剛性マトリックスにおいて初期配置ベクトル \mathbf{a}_0 を初期の磁束密度 \mathbf{B}_l に置き換えることで、磁性エラストマーの応力-ひずみ関係を有限要素法解析で得ることができる。

また、磁場の強さと磁束密度は式(4.42)より

$$\mathbf{H} = 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{B} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} \mathbf{b} \mathbf{B} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_6} \mathbf{b}^{-1} \mathbf{B} \right) = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (4.60)$$

と関係づけられる。

4.3. 結論

本章では、磁場中において機械的剛性が変化する磁性エラストマーを超弾性体として取り扱い、有限要素法で解析するために必要な磁性エラストマーの超弾性構成則の支配方程式を導いた。磁性エラストマーの超弾性構成則を導出するためには、機械的な平衡方程式だけでなく、磁場の平衡方程式を用いて、マクスウェル応力の寄与をひずみエネルギー関数に加えなければならない。そのひずみエネルギー関数には、材料内部の磁束密度ベクトルによる磁場構造テンソルを含めた不変量に基づく必要があり、材料内部の応力テンソル及び剛性を示す接線剛性マトリックスには、磁場構造テンソルが導入される。この磁場構造テンソルは異方性の超弾性構成則における初期配向ベクトルで構成される構造テンソルと等価であり、第2章で示した異方性超弾性体の構成則中の初期配向ベクトルをラグランジェ空間の磁束密度ベクトルで置き換えることで容易に取り扱える。

導出した磁性エラストマーの超弾性構成則を用いて、外部磁場が変化することによる磁性エラストマーの機械的応答変化を有限要素法解析で求めることができる。

第5章 磁場中の磁性エラストマーのせん断剛性変化

磁性エラストマーを使用した工業製品では、磁場変化によって、せん断剛性を変化させてその工業的特性を満足させている部品が多く見られる。従って、磁性エラストマーの外部磁場によるせん断剛性の変化挙動を把握する必要がある、その材料挙動を得るために、有限要素法解析は有効である。有限要素法において磁場の強さに依存する磁性エラストマーを超弾性体として解析するためには、磁性エラストマーのひずみエネルギー関数の形式を与え、その材料物性値を同定することが非常に重要である。本章では、磁性エラストマーの純せん断場を適切に取り扱うためのひずみエネルギー関数の提案と材料物性値の同定手法を示す。また、磁性エラストマーに外部磁場を与えたときのせん断剛性変化を得るための実験手法について述べる。得られた試験結果からひずみエネルギー関数の材料物性値を同定し有限要素法を用いた数値解析を行い、実験結果と数値解析結果の比較を行い、その有効性について検討する。

5.1. 磁性エラストマーのひずみエネルギー関数の導出と材料物性値同定手法

外部磁場による磁歪に対する初期応力は微小であり、材料中の磁束密度は均一であり、変形後も同じ方向を向いていると仮定すると、そのひずみエネルギー関数には、次式の不変量 I_6 が磁場に関する不変量として使用される。

$$I_6 = |\mathbf{B}_l|^2 \quad (5.1)$$

ここで、 \mathbf{B}_l はラグランジェ空間での磁束密度ベクトルである。本章では、磁性エラストマーのひずみエネルギー関数として、最も単純な Neo-Hooke 則を修正して、次式を考案する。

$$W(I_1, I_6) = \frac{1}{q(I_6)} G(I_6) (I_1 - 3)^{q(I_6)/2} \quad (5.2)$$

$$G(I_6) = G_0 + G_1 \cdot \mathcal{L}(G_2 \cdot I_6) = G_0 + G_1 \left[\coth(G_2 \cdot I_6) - \frac{1}{G_2 \cdot I_6} \right] \quad (5.3)$$

$$q(I_6) = q_0 + q_1 \cdot I_6 \quad (5.4)$$

せん断剛性を表現する $G(I_6)$ には Langevin 関数を用いているので、磁場飽和に対応できる。指数部の q が磁束密度に依存せず、固定値として 2.0 である場合、Neo-Hooke 則に帰着する。磁場の効果等は考慮せずに単純な Neo-Hooke 則において、指数部の q を変化させて単軸試験を模擬した結果を図 5.1 に示す。 q が増加することにより、応力-ひずみ関係が指数関数的に変化する。すなわち、磁束密度 \mathbf{B} が増加した場合のひずみ硬化の現象を表すことができる。一方、見かけのせん断剛性率 $G(I_6)$ に用いられている Langevin 関数を図 5.2 に示す。この図より磁束密度の増加により、磁気飽和現象でせん断剛性が漸近する現象を取り扱えることがわかる。式 (5.2) に示す本研究で考案した磁性エラストマーのひずみエネルギー関数での材料物性のパラメータは G_0 , G_1 , G_2 , q_0 および q_1 の 5 つである。この内、 G_0 と q_0 は磁場がない状態での材料物性値であり、 G_1 , G_2 および q_1 が磁場に依存する材料物性値となる。

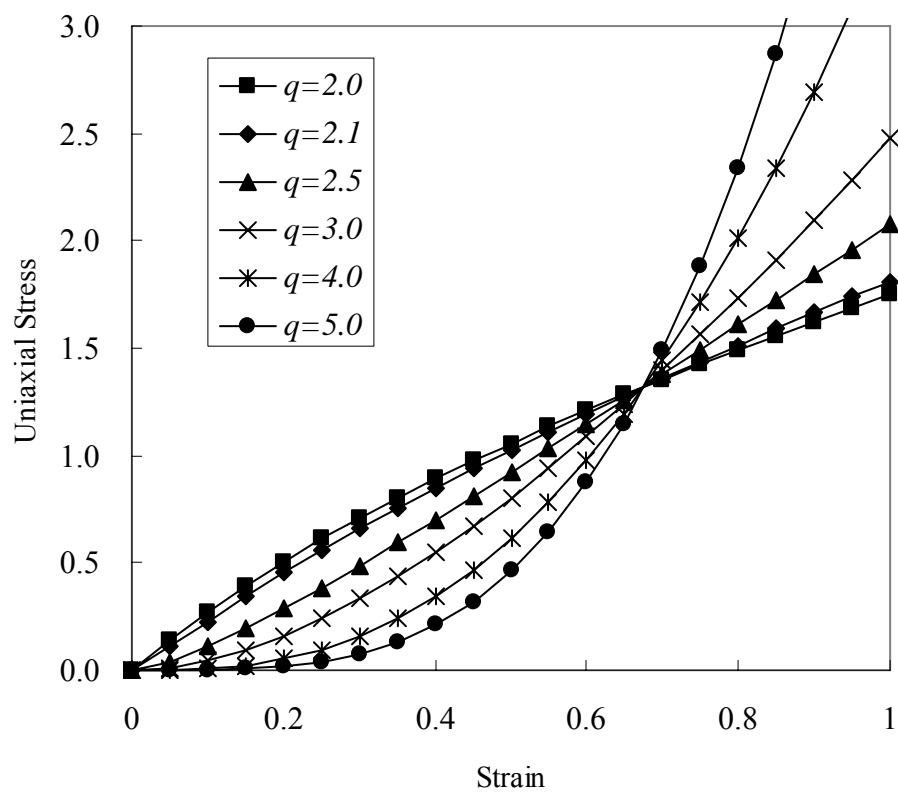


図 5.1 q の変化による応力-ひずみ関係

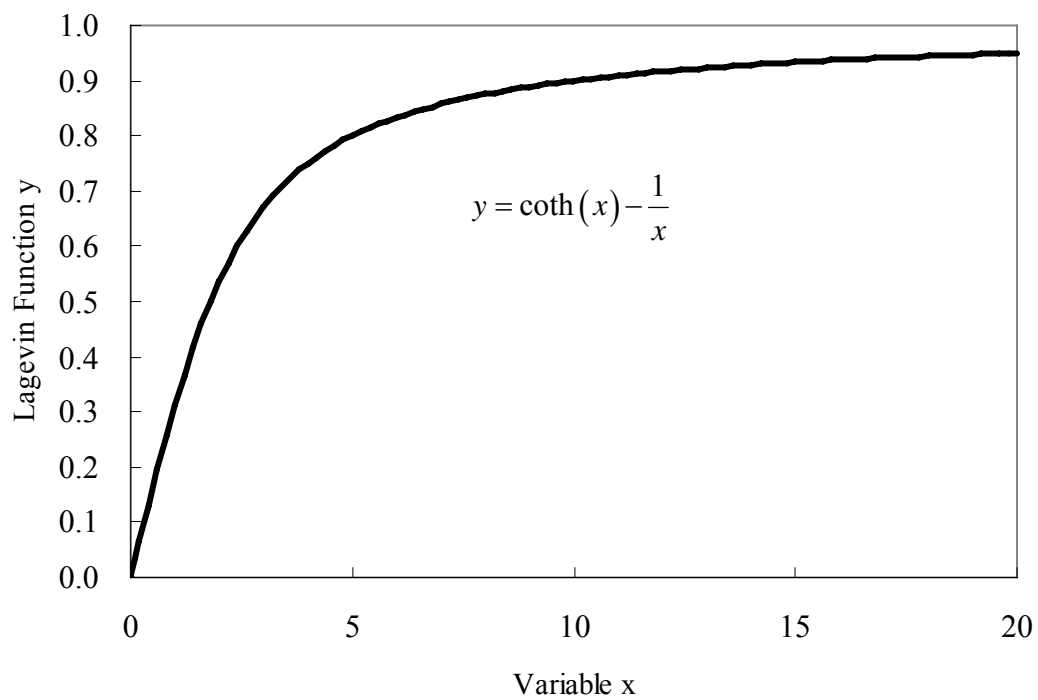


図 5.2 Langevin 関数

次に、磁性エラストマーの動作モードはせん断変形が多いので、図 5.3 に示すせん断場での応力の理論解を導出し、その理論解から式(5.2)のひずみエネルギー関数における 5 つの材料物性値の同定手法について以下に示す。

図 5.3 に示す変形前の真円が変形後に楕円となることから、せん断場を形成している変形様式であることがわかる。ここで、ひずみエネルギー関数を W としたとき、負の静水圧 p を用いて主軸方向の真応力 t_i の理論解は

$$t_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + p \quad (5.5)$$

で得られる [44]。ここで、 λ_i は主軸方向の伸長比である。

機械的な不変量は I_1 のみであることから、

$$t_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} + p \quad (5.6)$$

となり、 $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ であることから、

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i \quad (5.7)$$

となる。従って、真応力は

$$t_i = 2\lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + p \quad (5.8)$$

で得られる。

純せん断は図 5.3 に示す平面ひずみ状態であることから、各応力成分は

$$t_1 = 2\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + p \quad (5.9)$$

$$t_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + p \quad (5.10)$$

$$t_3 = 2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} + p \quad (5.11)$$

となる。

3 軸方向には力が働いていないので、 $t_3 = 0$ であり、軸応力は

$$t_1 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad (5.12)$$

$$t_2 = 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad (5.13)$$

となり、公称応力はそれぞれ

$$f_1 = \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot T_1 = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad (5.14)$$

$$f_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot T_2 = 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad (5.15)$$

である。ひずみエネルギー関数は式(5.2)の形式を用いており、

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{G}{2} (I_1 - 3)^{\frac{q}{2}-1} = \frac{G}{2} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2 \right)^{\frac{q}{2}-1} = \frac{G}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^{q-2} \quad (5.16)$$

である．ここで $G = G(I_6)$ ， $q = q(I_6)$ とする．最終的に公称応力の理論解は

$$f_1 = G \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^{q-2} \quad (5.17)$$

$$f_2 = G \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^{q-2} \quad (5.18)$$

となる．

式(5.17)で示される応力理論解と実験結果の値より最小二乗法を用いれば，本研究で考案した式(5.2)のひずみエネルギー関数に必要な材料物性値 G_0 ， G_1 ， G_2 ， q_0 および q_1 を算出できる．ここで， G_0 および q_0 は磁束密度がゼロであるときの定数であるので，この二つの物性値は磁場を与えない状態でのせん断試験の結果から求める．残る G_1 ， G_2 および q_1 は磁束密度に依存する物性値であるので，外部磁場を与えた状態のせん断試験の実験結果から，最小二乗法を用いて求めることができる．

図 5.4 に物性値同定手順を示す．

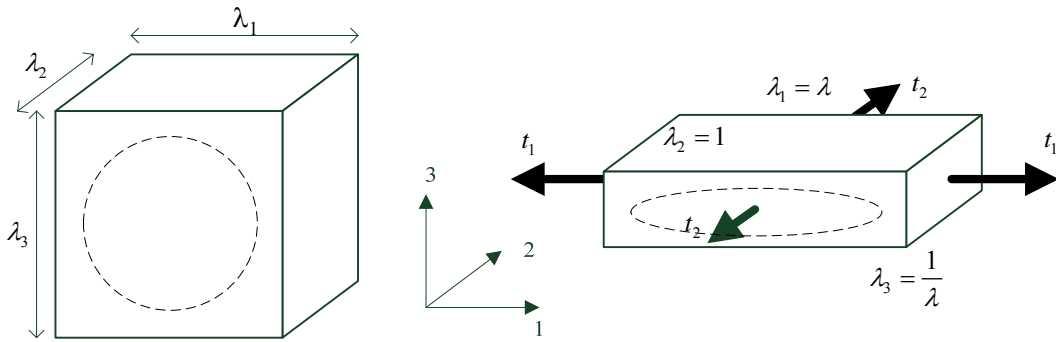


図 5.3 純せん断での変形モード

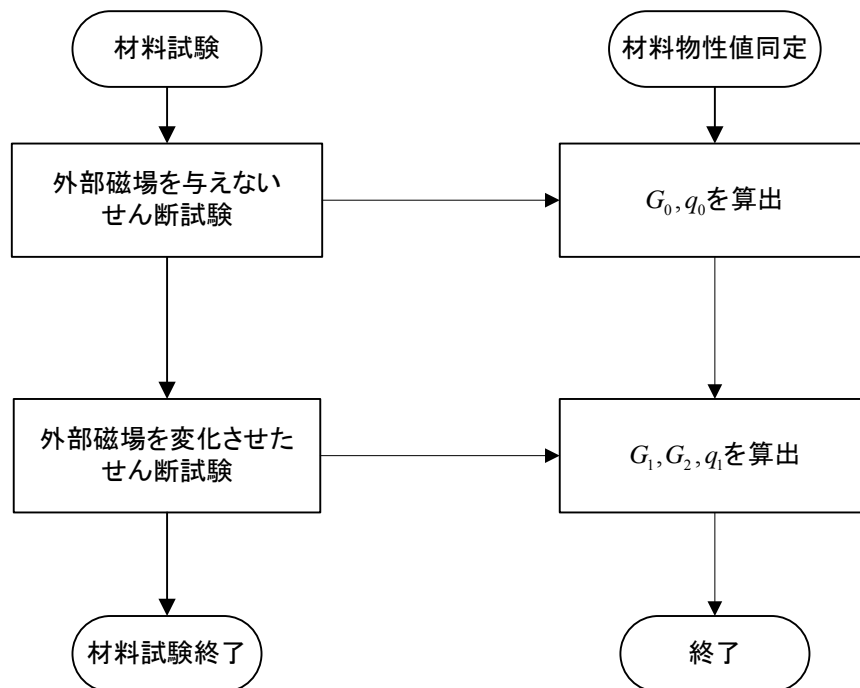


図 5.4 材料物性値同定手順

5.2. ひずみエネルギー関数の検証

前節において、磁場中の磁性超弾性体の変形を有限要素法解析で求めるために、ひずみエネルギー関数の具体形とその材料物性値の同定手法を導出した。本節においては、導出した変形解析理論の有効性を示すために、磁性粒子を超弾性体である PDMS (polydimethylsiloxane) に混練した試験片を用いて、磁場中および磁場のない場合でのせん断試験を行い、導出した解析理論と実験結果を比較した。以下に、実験方法および解析方法について示すとともに実験結果と解析結果を比較し、考察する。

5.2.1. 試験片の作成方法と実験装置および実験方法

試験片の作製方法を図 5.5 に示す。超弾性材料としてはマイクロマシンの作製に一般的に用いられている PDMS を用いた。PDMS は構造材料としてのみならず、通気性の特徴を有することから機能性材料として用いられている。近年、Tsumori ら [52][53] は、PDMS に磁性材料である 50nm 粒径の鉄粉を混練し、外部磁界を利用して駆動する微小アクチュエータや機能素子を報告している。本研究でも同様の方法で PDMS に磁性材料を混練し、試験片を作製して実験に用いた。

磁性材料体積密度により、外部磁界に対する挙動が異なることから、0%、1%、2%、3% の 4 種類の体積密度になるように異なる試験片を用意した。まず、母剤を作製するために試験管にて、PDMS (東レ・ダウコーニング株式会社製 SILPOT184) に硬化剤を 10 : 1 の割合で混合し、ハンディ攪拌機で攪拌後、デシケータに移しロータリーポンプで真空状態として脱泡した。その後、別の試験管に母剤を 4 cc ずつ取り出し、それぞれに粒径が 50nm である酸化鉄 (Fe_3O_4) を体積密度で 1%、2%、3% の比率で含有させた。それぞれの材料を再度、ハンディ攪拌機で攪拌し、厚さが約 1mm となる型に移して、真空機で約 1 時間かけて脱泡した。その後、80℃ のオーブンで 2 時間保持し、熱硬化させた。作製した試験片を図 5.6 に示す。磁性エラストマーは、熱硬化させる際にも磁場を与えて、磁性粒子が揃った状態で形成することで、より強い磁場依存性を持たせることができる [10] が、今回の実験では、試験片の熱硬化時には磁場中での形成を行えなかったため、磁性粒子はランダムに配置されたと見なされる。しかし、今回作製した試験片材料においては、分散状態があまり良くなく、凝集している部分もある。磁性粒子が凝集しないように界面活性剤で包み分散させる手法 [13] があるが、本研究での対象分野ではない。荒い分散状態ではあるが、磁性粒子を含む磁性エラストマーの磁場中での機械的剛性変化を定性的に得るには十分と考え、この試料を用いた。

作製した試験片を用いて、純せん断試験を行った。その概要を図 5.7 に示す。図 5.8 に示す治具に試験片を挟み、横幅 20mm・高さ 2mm・幅 1mm となるように細長い試験片を上下に引っ張ることで純せん断場とすることができる [54][55]。試験片にかかる磁場が幅方向に平行になるように、試験片の両端にネオマグ社製の NeFeB の永久磁石を配置し、磁石の距離を制御することにより試験片に与える磁場の強さを制御した。永久磁石間の磁場は磁気プローブを用いて、空芯状態で事前に計測した。永久磁石間の磁束密度と距離の関係を図 5.9 に示す。永久磁石と位置制御装置を図 5.10 に示す。

作製した磁性粒子の体積密度が 0%・1%・2%・3% の試験片それぞれに、磁束密度を 0T・0.25T・0.4T の 3 種類の場合について、図 5.11 に示す島津製作所製卓上小型試験機 EZ-Test を用いて引張試験を行い、変位と荷重を計測した。

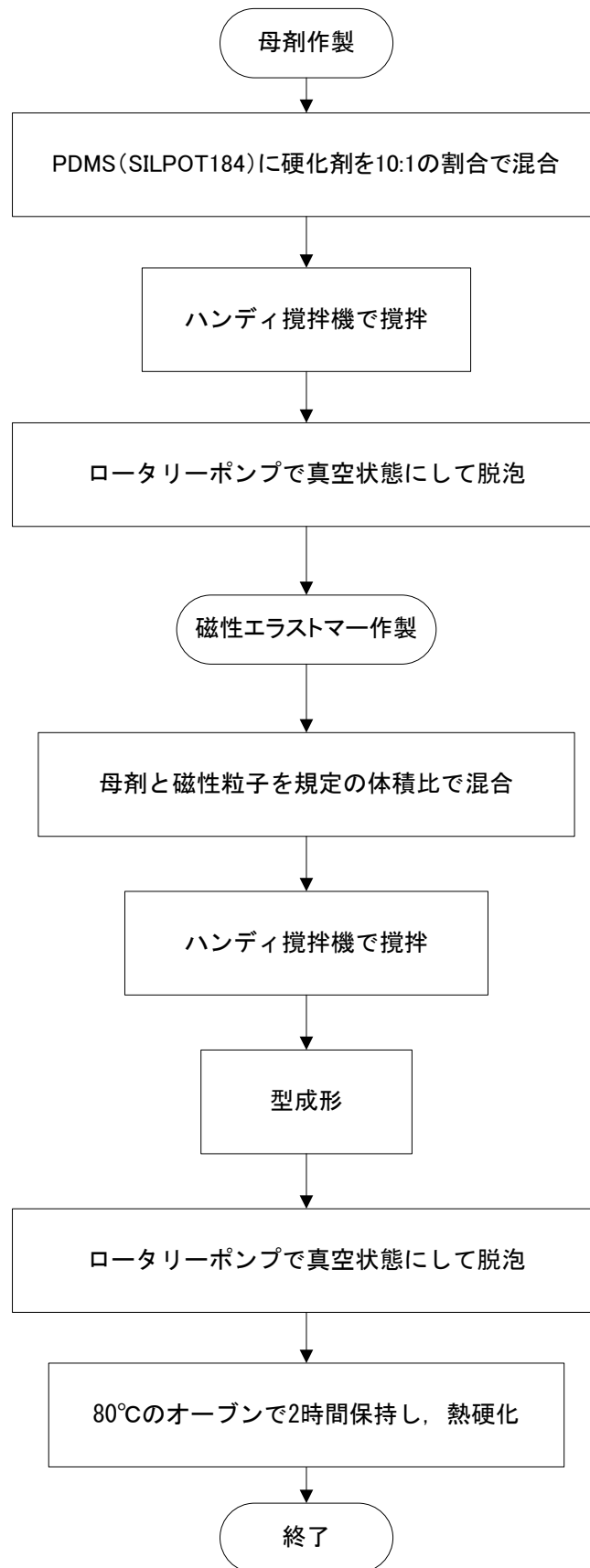


図 5.5 磁性エラストマー作製手順

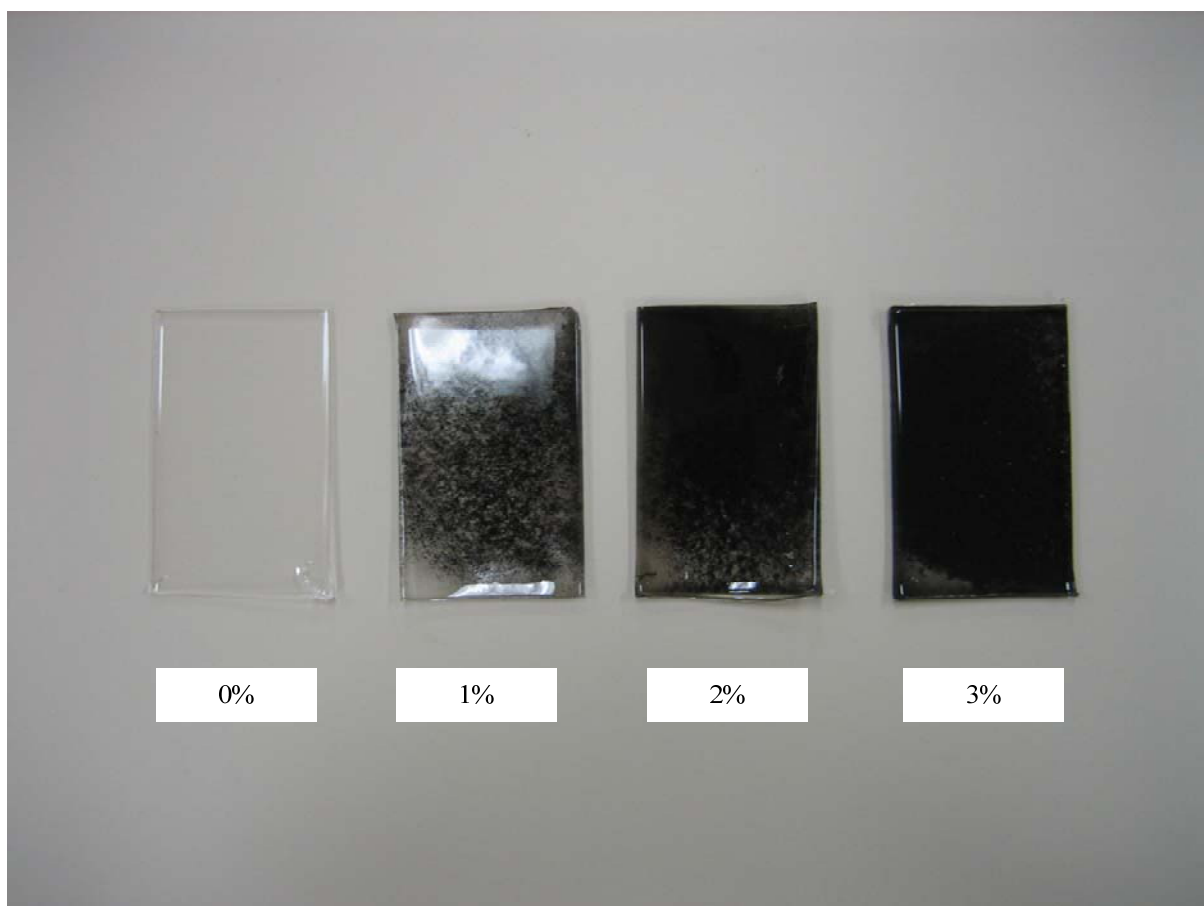


図 5.6 PDMS に磁性粒子を混合させた試験片（比率は体積密度を示す）

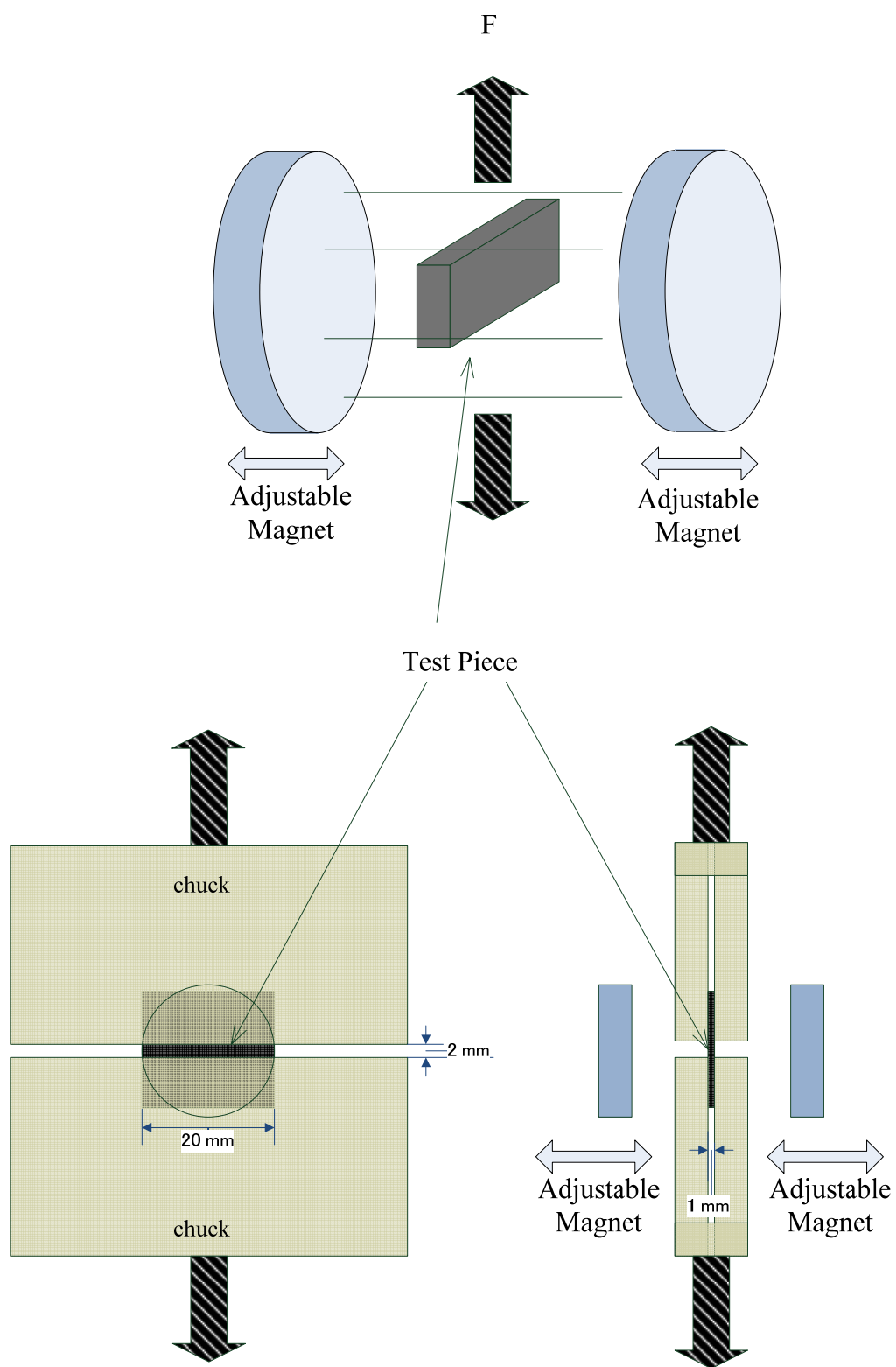


図 5.7 外部磁場を与えたせん断試験

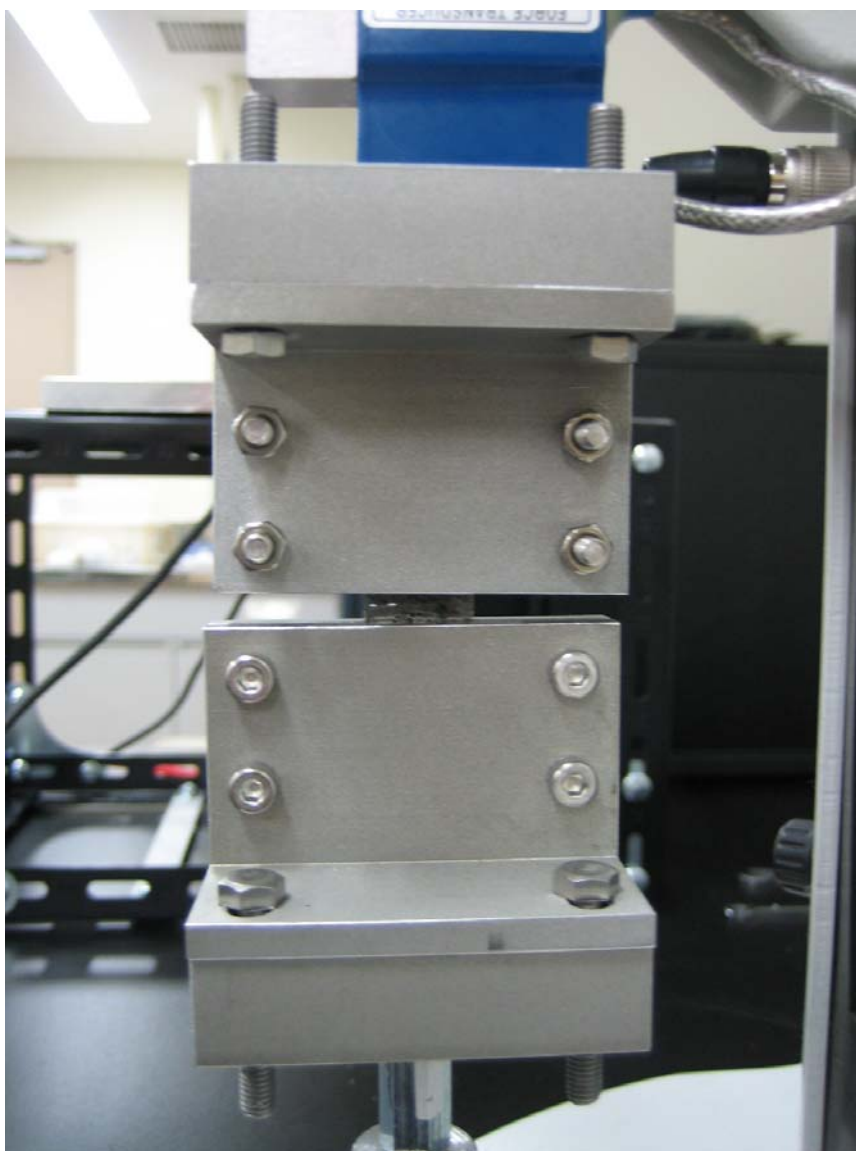


図 5.8 純せん断試験治具

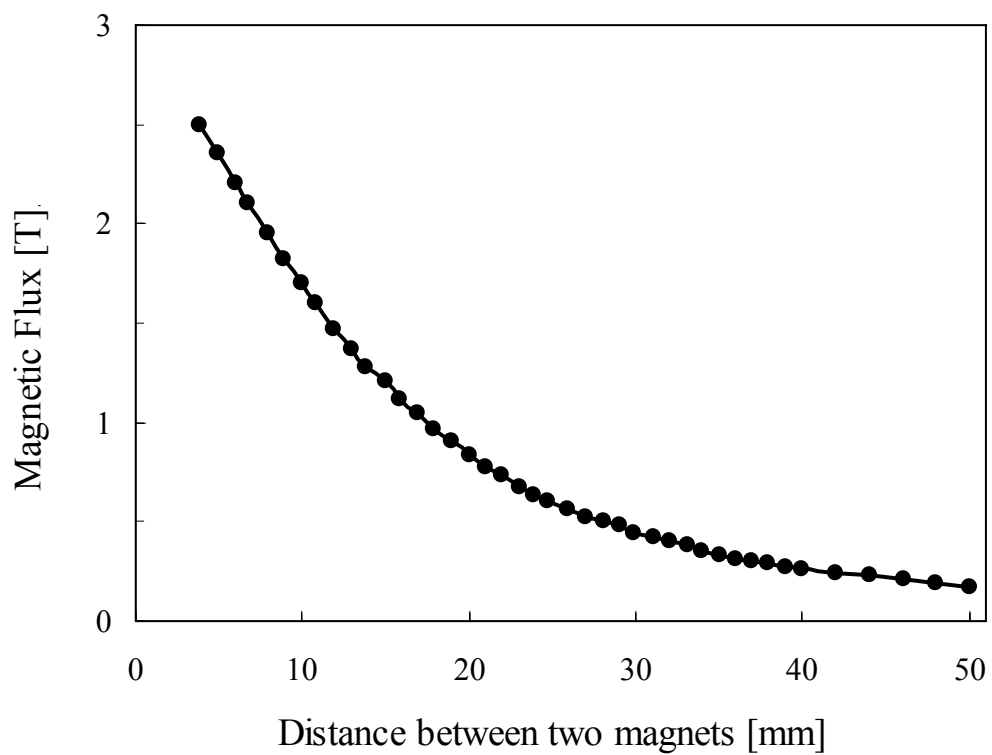


図 5.9 磁束密度—位置関係

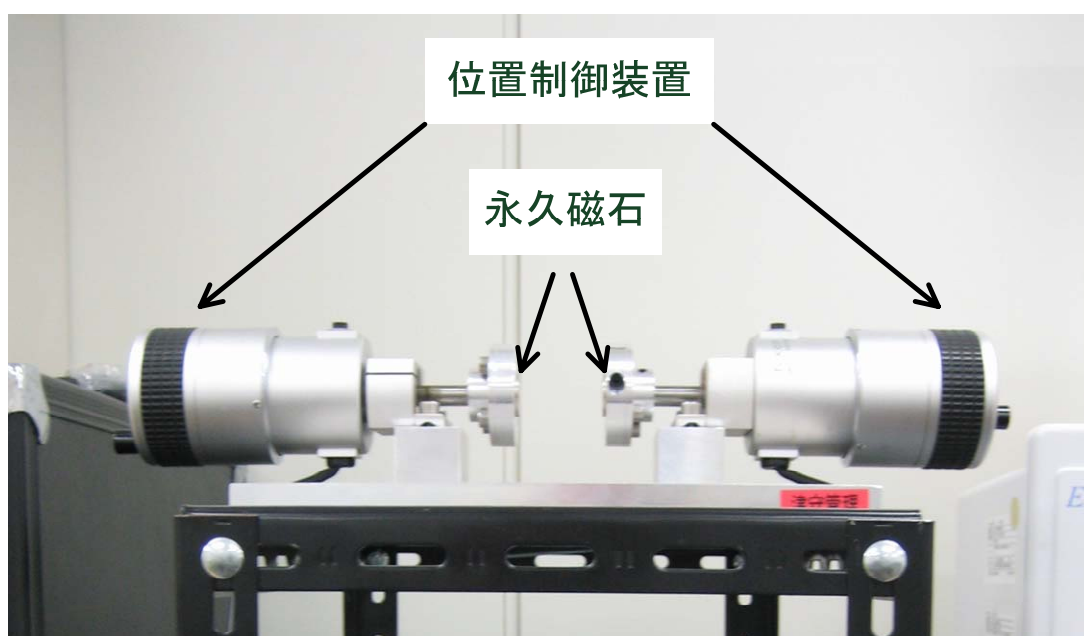


図 5.10 永久磁石



図 5.11 卓上小型試験機

5.2.2. 実験結果

3 種類の外部磁場中で体積密度の異なる 4 種類の試験片に対して引っ張り試験を行った試験片の応力-ひずみの関係を 図 5.12 に示す。しかし、2%と3%の体積密度での試験片では磁性粒子を適切に分布させることが難しく、PDMS自体の配合比にもばらつきがあり、それぞれの結果には明白な差が得られなかったため、体積密度については0%、1%、2%までの結果を示した。

図 5.12 において、磁性粒子を含まない試験片を磁場 0Tの環境でひずみ 0.8 まで引っ張った場合の結果を実線で示した。磁性粒子の体積密度が1%の試験片の場合の応力-ひずみ線図を、磁場がない状態を○で、磁場 0.25Tの状態を△で、磁場 0.4Tの状態を□でプロットした。また、磁性粒子の体積密度が2%の試験片についての応力-ひずみ線図を、磁場がない状態を●で、磁場 0.25Tの状態を▲で、磁場 0.4Tの状態を■でプロットした。

各試験片と磁場を変更した条件での応力-ひずみ線図から算出した見かけの弾性定数を 表 5.1 に示す。見かけの弾性定数は、各応力-ひずみ線図が単一のゴム材料のせん断試験結果であるとして、その線図からNeo-Hooke体の材料物性値を同定し、その値から換算した。磁性粒子の弾性定数が母剤のPDMSよりも弾性定数が大きいため、磁性粒子の体積密度が大きいほど見かけの弾性定数は大きくなっている。

図 5.13 に体積密度に対する見かけの弾性定数の変化を示す。横軸に体積密度、縦軸に見かけの弾性定数を取り、磁場がない状態を●で、磁場 0.25Tの状態を▲で、磁場 0.4Tの状態を■でプロットした。そして、体積密度が0%の状態の弾性定数を1.0として、体積密度による変化比率を表 5.2 に示す。いずれの外部磁場の状態でも、見かけの弾性定数が磁性粒子の体積密度にほぼ線形に比例していることがわかる。

図 5.14 に磁場に対する見かけの弾性定数の変化を示す。横軸に磁場の強さ、縦軸に見かけの弾性定数を取り、体積密度 0%の試験片を一点鎖線で、体積密度 1%の試験片を破線で、体積密度 2%の試験片を実線でプロットした。そして、外部磁場がない状態の弾性定数を1.0として、外部磁場による変化比率を表 5.3 に示す。磁性粒子を含まない試験片では、その見かけの弾性定数は外部磁場に依存しない。体積密度 1%の試験片に 0.4Tの磁場を与えた場合、せん断剛性が約 1.5 倍となり、体積密度 2%の試験片に 0.4Tの磁場を与えた場合、せん断剛性が約 1.65 倍となった。磁性粒子の体積密度が大きくなるほど、外部磁場の影響が大きくなることがわかる。

表 5.1 見かけの弾性定数 (N/mm^2)

| | 0T | 0.25T | 0.4T |
|----|--------|--------|--------|
| 0% | 0.6506 | 0.6506 | 0.6506 |
| 1% | 1.0955 | 1.3090 | 1.6454 |
| 2% | 1.5898 | 1.8827 | 2.6195 |

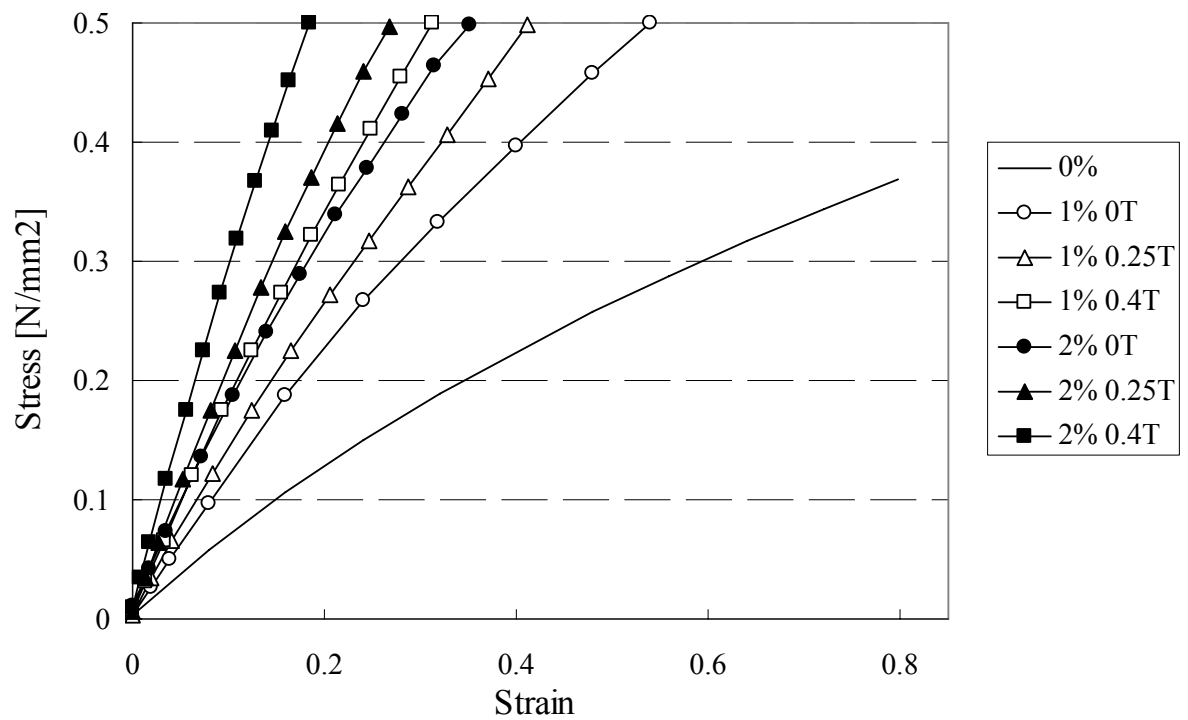


図 5.12 応力-ひずみ曲線

表 5.2 体積密度に対する見かけの弾性定数の変化比率

| | 0T | 0.25T | 0.4T |
|----|-------|-------|-------|
| 0% | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 1% | 1.684 | 2.012 | 2.529 |
| 2% | 2.444 | 2.894 | 4.026 |

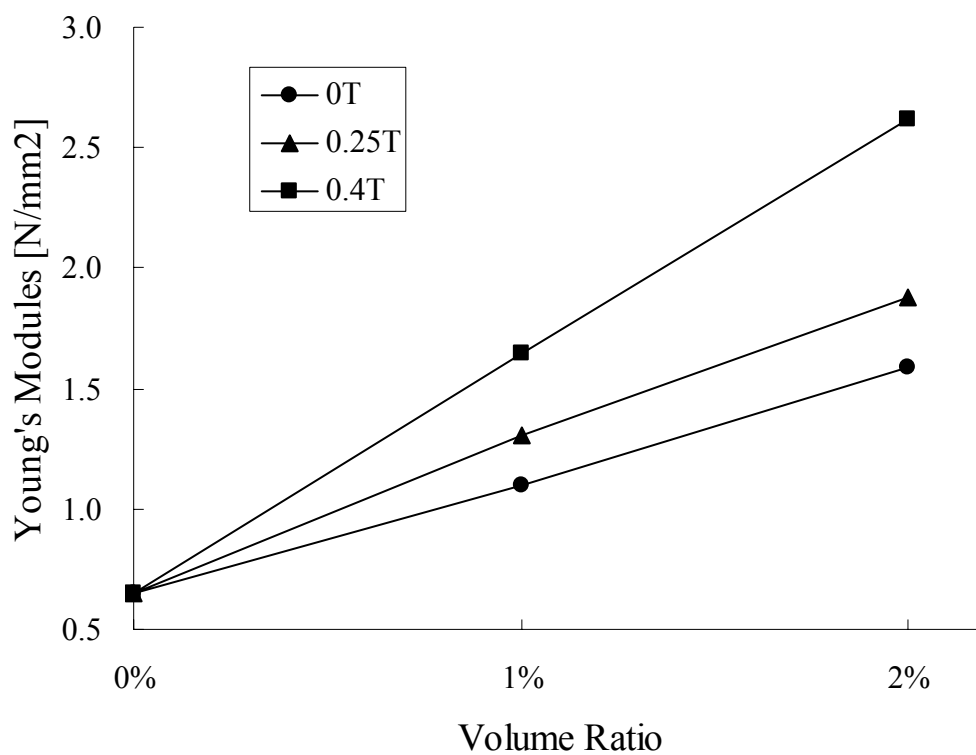


図 5.13 体積密度に対する見かけの弾性定数の変化

表 5.3 外部磁場に対する見かけの弾性定数の変化比率

| | 0T | 0.25T | 0.4T |
|----|-------|-------|-------|
| 0% | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 1% | 1.000 | 1.195 | 1.502 |
| 2% | 1.000 | 1.184 | 1.648 |

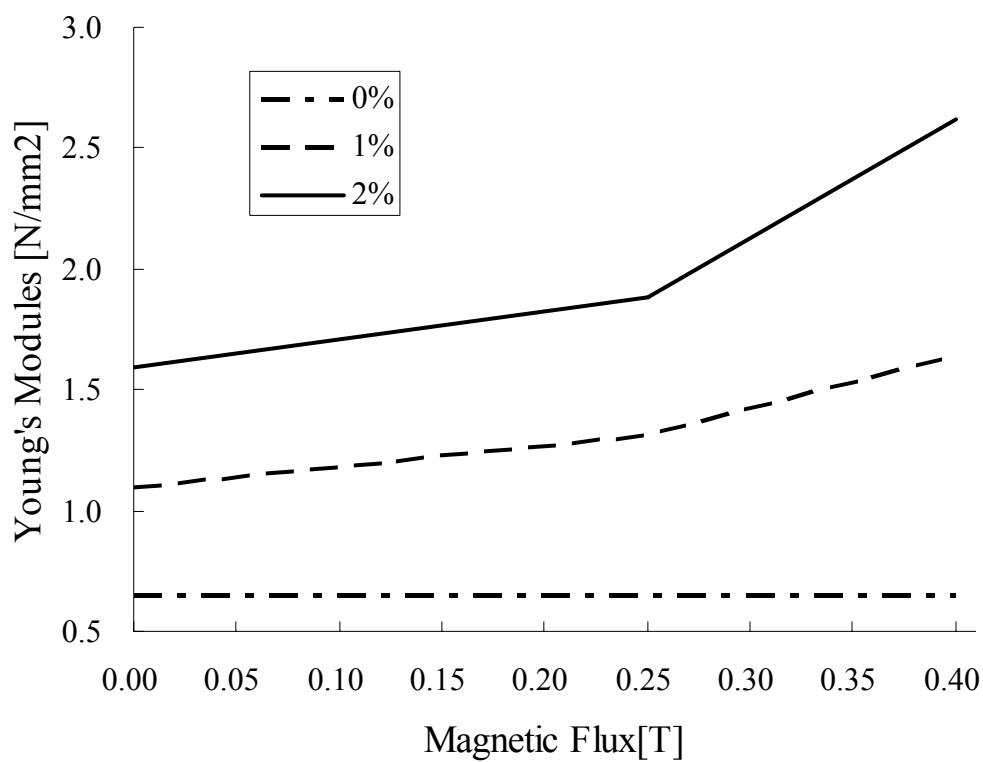


図 5.14 磁場に対する見かけの弾性定数の変化

5.2.3. 物性値の同定と有限要素解析

5.1 節で示した，磁性エラストマーのひずみエネルギー関数における材料物性値の同定手法を用いて，同定した各体積密度における材料物性値を 表 5.4 に示す．体積密度 0%の物性値は磁場に依存しないので，磁場依存項である G_1, G_2, q_1 は算出されない．体積密度 1%と 2%の材料ではまず，外部磁場がない状態で計測された応力-ひずみ線図から磁場に依存しない項である G_0, q_0 を同定する．そして，得られた G_0, q_0 と外部磁場を与えた状態で計測された応力-ひずみ線図から，磁場依存項である G_1, G_2, q_1 を同定した．

5.2.4. 解析結果と考察

5.2.3 節で得られた材料物性値とひずみエネルギー関数を，ユーザールーチンを用いて有限要素法プログラムに組み込み，数値計算を行った．図 5.15 に示すように有限要素には 3 次元ソリッド要素を用いて，純せん断モードを模擬した．実線で示した単位立方体の要素が変形前の形状を示し，点線表示した要素が変形後の形状である．剛体モードを除去するための境界条件として，節点番号①④⑤⑧の 1 軸方向，全節点の 2 軸方向，節点番号①②③④の 3 軸方向に変位拘束条件を与えた．節点番号③⑥⑦には節点番号②と 1 軸方向の変位条件が同じとなる多点拘束境界条件を設定し，節点番号②番に 1 軸方向の強制変位を与えた．この多点拘束条件により，節点番号②番の反力が節点番号②-③-⑦-⑥で構成される単位面積の面の力を代表するので，節点番号②番の反力をそのまま公称応力として扱える．また，節点番号②番の変位量を工学ひずみとして扱える．節点番号③-④-⑧-⑦で構成される 2 番軸に垂直な面内の変形前の真円を実線で示す．変形後には点線で表示される楕円形状となり，純せん断場を模擬できる．本来であれば磁場と応力場を連成させて解析できる点が有限要素法の大きな利点であるが，今回の純せん断試験では材料中の磁束密度は均一であり変形による変化はないと仮定し，磁束密度を状態変数として扱い境界条件として磁束密度を与えた．有限要素法による解析結果と実験結果を図 5.16, 図 5.17, 図 5.18 に示す．実験値について，磁場なしを○記号で，0.25Tを△記号で，0.4Tを□記号でそれぞれ示した．有限要素解析による解析結果について，磁場なしを破線，0.25Tを実線，0.4Tを一点鎖線で示した．いずれの体積密度の試験片においても，提案したエネルギー関数を用いた 計算値は実験値と良く一致している．

表 5.4 材料物性値

| | G_0 | G_1 | G_2 | q_0 | q_1 |
|----|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 0% | 0.223399 | ----- | ----- | 2.071999 | ----- |
| 1% | 0.397006 | 1.767065 | 2.086820 | 2.078874 | -0.058579 |
| 2% | 0.546029 | 2.962926 | 1.917273 | 2.050000 | -0.312500 |

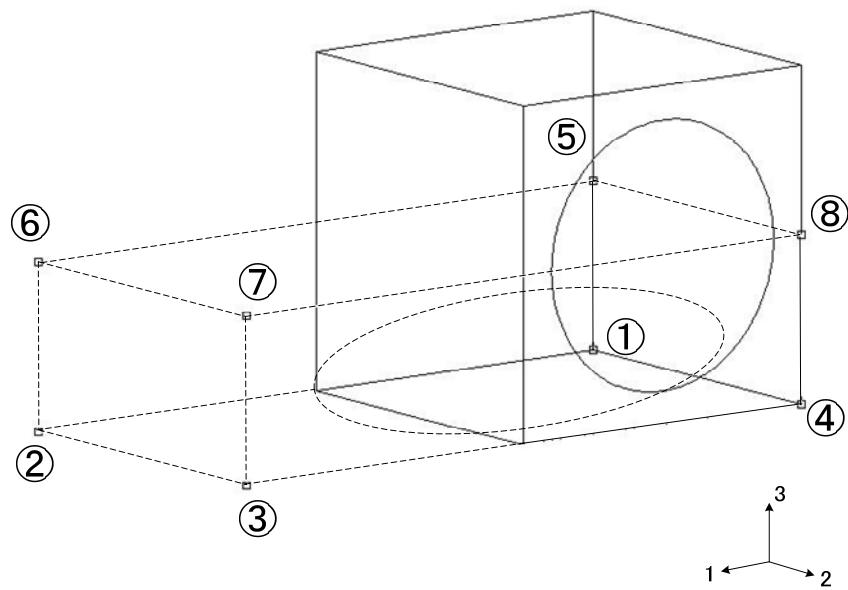


図 5.15 純せん断を模擬する有限要素モデル

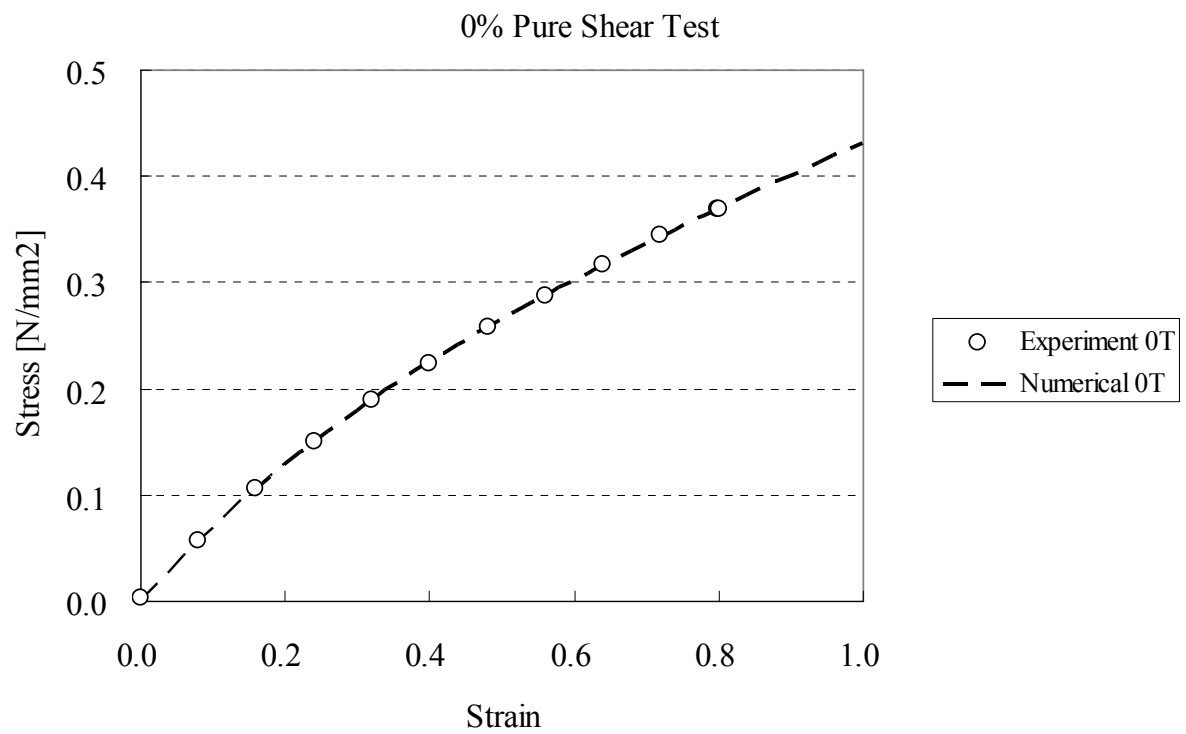
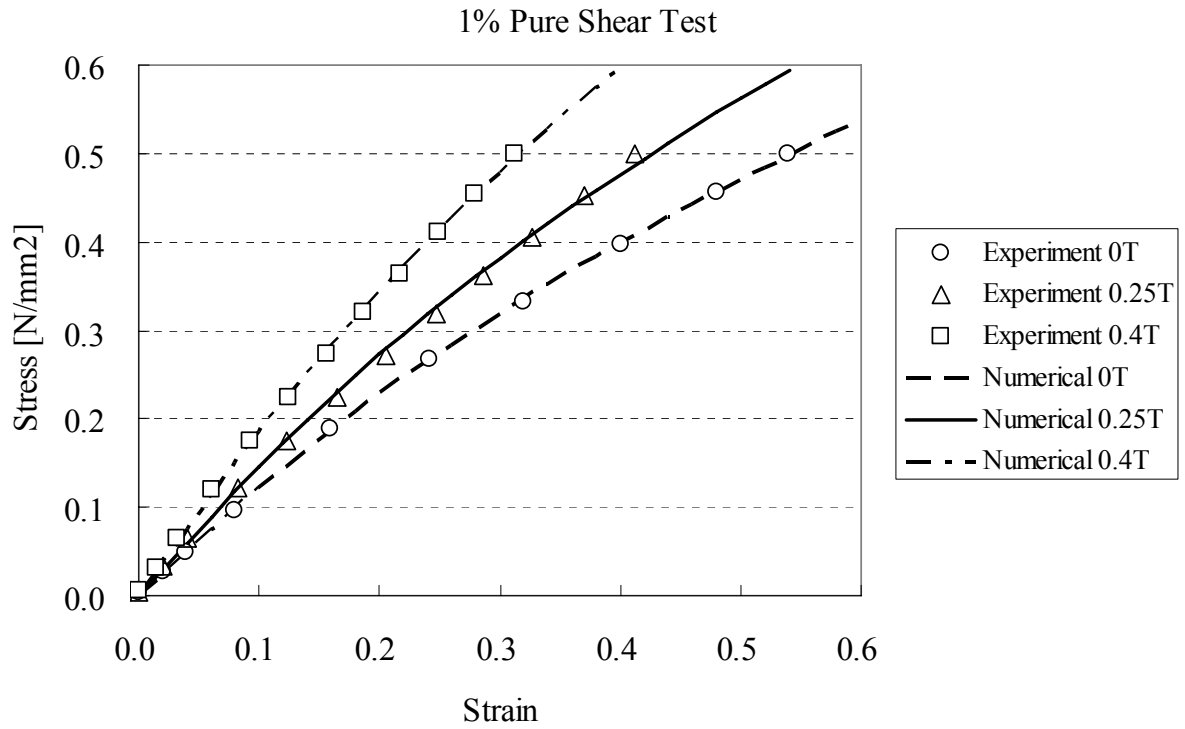
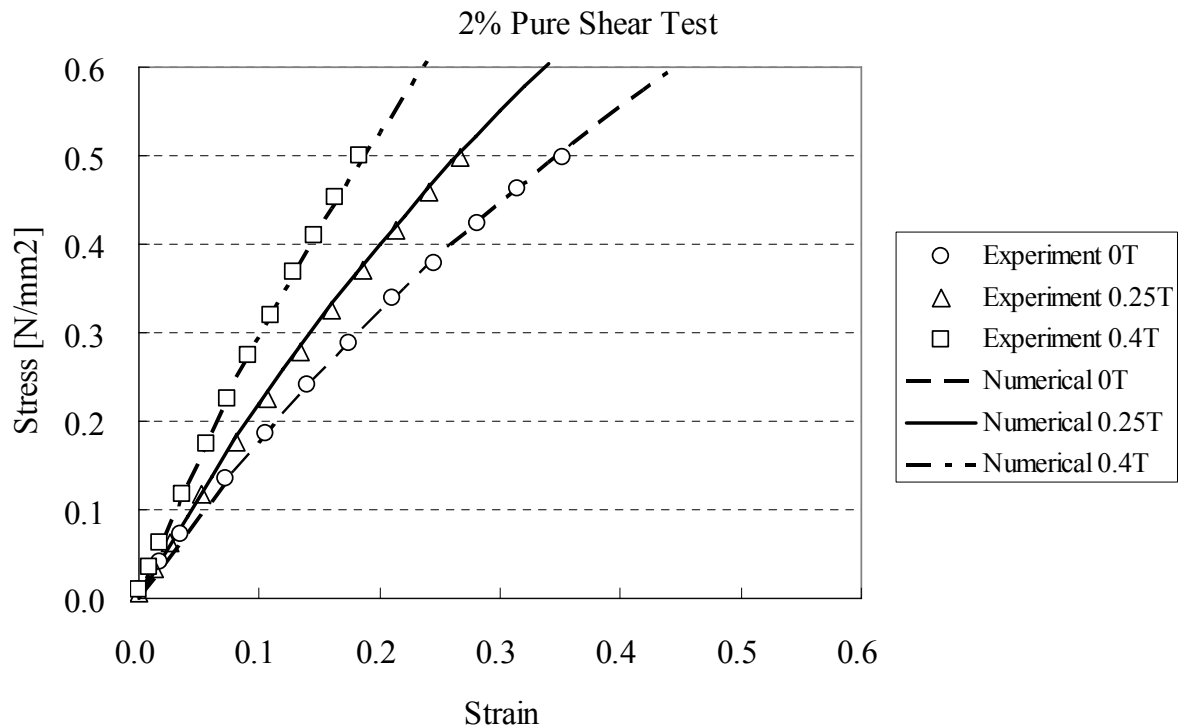


図 5.16 Stress-Strain relation for Magnetic Particle Volume ratio 0%



☒ 5.17 Stress-Strain relation for Magnetic Particle Volume ratio 1%



☒ 5.18 Stress-Strain relation for Magnetic Particle Volume ratio 2%

5.3. 単純せん断試験による検証

前節では、磁束密度が一定の状態と比較的大きなひずみ領域までせん断試験を行い、応力-ひずみ線図を求め、本研究でのひずみエネルギー関数の検証を行った。本節では、ひずみ量が一定の状態、磁束密度を変化させた場合のせん断剛性変化について検証を行う。この検証を行うために、Jollyら [3]が行った単純せん断試験の結果を用いて、本研究でのひずみエネルギー関数を適用し、数値実験を行った。彼らは、図 5.19 に示すような単純せん断試験を行っている。黒色で示す磁性エラストマーの試験片は $20\text{mm} \times 7.5\text{mm} \times 1.0\text{mm}$ の大きさであり、中央と外側の非磁性板で挟まれて、二重に配置されている。1%のひずみが得られるように中央と外側の平板に変位が与えられた状態で、図 5.19 に示すように垂直方向の磁束密度を変化させながらせん断荷重を計測し、せん断剛性が測定されている。母材はシリコンゴムであり直径が $3 \sim 4 \mu\text{m}$ の磁性粒子（カルボニルアイアン：Fe）が 10%、20%および 30%の体積密度で混入された試験片が用いられている。磁束密度の変化によるせん断剛性変化量を図 5.20 に示す。図 5.20 の横軸は外部から与えた磁束密度を示し、縦軸は磁場を与えない状態でのせん断剛性と磁場を与えたときのせん断剛性との差を示す。体積密度が 10%の結果を△で、体積密度が 20%の結果を◆で、体積密度が 30%の結果を□で示す。いずれの体積密度の材料においても、磁束密度の変化に対して指数関数的にせん断剛性が上昇した後、表 5.5 に示す事前に計測された各体積密度での飽和磁束密度以降では剛性変化が見られなくなる結果となっている。

この実験結果に対して、本研究で考案したひずみエネルギー関数のための材料物性値の同定を行い、有限要素法解析による数値実験を試みた。Jollyらの文献では磁場を与えない状態でのせん断剛性（表 5.5 参照）が報告されているので、そのせん断剛性が、磁場を与えない状態での物性値 G_0 であるとし、磁場を与えない状態ではひずみエネルギー関数がNeo-Hooke則となるように、指数部の物性値 q_0 は 2.0 とした。そして、本研究で考案した材料物性値同定手法を用いて、磁場に依存する材料物性値 G_1, G_2, q_1 を同定した。各体積密度での材料物性値を表 5.6 に示す。これらの材料物性値を用いて、有限要素法によるせん断変形解析を行い、得られた数値計算結果のせん断応力成分から、せん断剛性を算出した。磁束密度変化に対するせん断剛性の変化量を図 5.21 に示す。実験結果について、体積密度が 10%を△で、体積密度が 20%を◆で、体積密度が 30%を□で示し、本手法における解析計算結果について、体積密度が 10%を一点鎖線で、体積密度が 20%を破線で、体積密度が 30%を実線で示した。また、磁束密度変化に対するせん断剛性の実値を図 5.22 に示す。図 5.21 と同様に実験結果について、体積密度が 10%を△で、体積密度が 20%を◆で、体積密度が 30%を□で示し、本手法における解析計算結果について、体積密度が 10%を一点鎖線で、体積密度が 20%を破線で、体積密度が 30%を実線で示した。表 5.7 に磁場がない状態でのせん断剛性を 1.0 として、磁場を与えたときのせん断剛性の変化比率を示す。表 5.7 に示すように、30%の体積密度での最大変化率は 1.31 倍であり、20%と 10%の体積密度での最大変化率は約 1.4 倍となっている。ひずみ幅が 1%の微小ひずみ状態においても、比較的大きな変化率が得られており、エラストマーとしてより実用的な大ひずみ領域では、さらに変化率が大きくなることが予想される。また、本研究で考案したひずみエネルギー関数を用いることで、図 5.21 で示されるように、各体積密度における磁気飽和でせん断剛性が一定となる現象を適切に取り扱えることを示した。

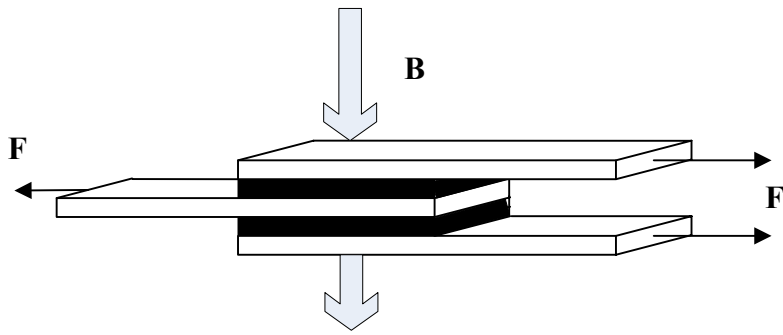


図 5.19 単純せん断試験

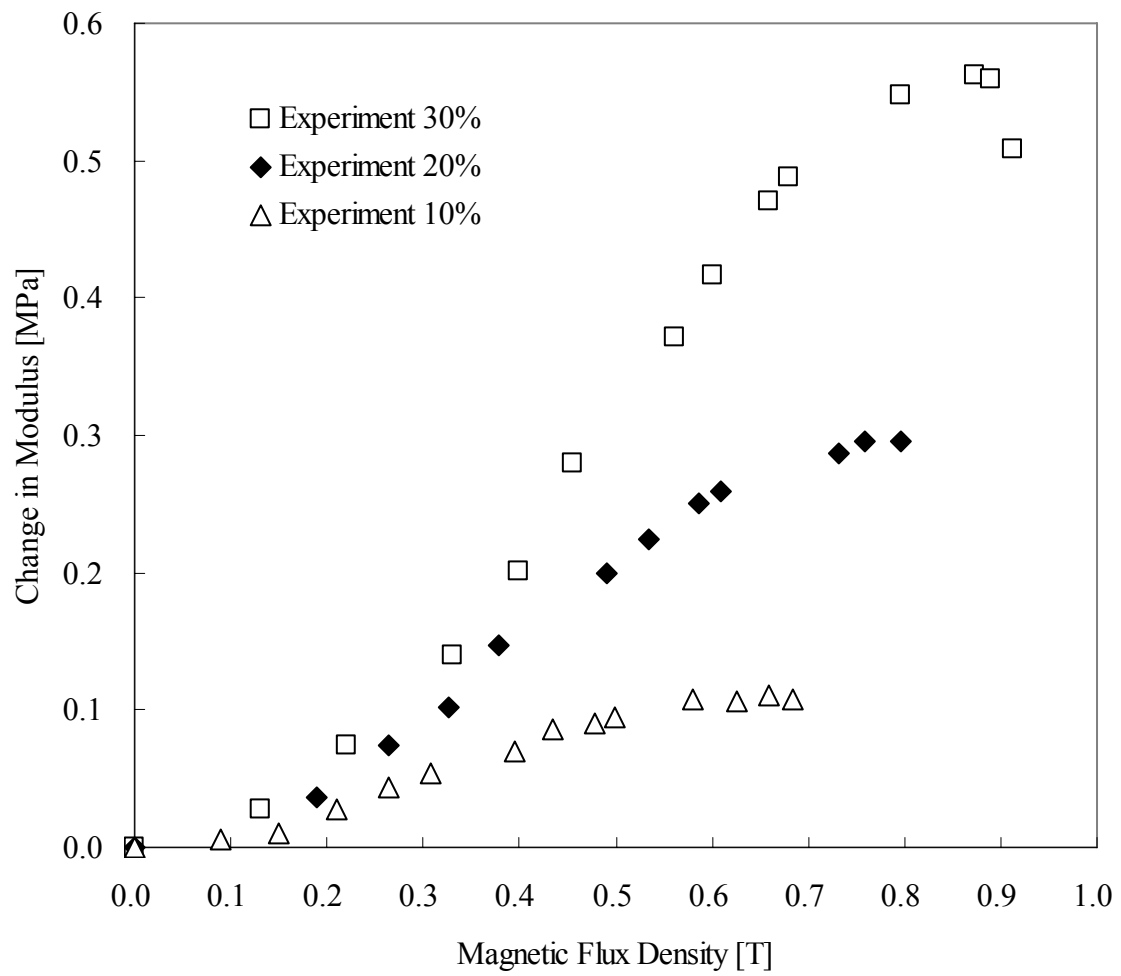


図 5.20 実測値によるせん断剛性の変化量

表 5.5 磁場のない状態でのせん断剛性と飽和磁束密度

| | Nominal Modulus,no filed(Mpa) | Saturate Flux Density(T) |
|-----|-------------------------------|--------------------------|
| 30% | 1.80 | 0.83 |
| 20% | 0.74 | 0.74 |
| 10% | 0.26 | 0.62 |

表 5.6 材料物性値

| | G_0 | G_1 | G_2 | q_0 | q_1 |
|-----|-------|----------|----------|-------|----------|
| 30% | 1.80 | 0.937695 | 4.883030 | 2.00 | 0.015561 |
| 20% | 0.74 | 0.410964 | 8.052168 | 2.00 | 0.012589 |
| 10% | 0.26 | 0.732522 | 3.725023 | 2.00 | 0.299895 |

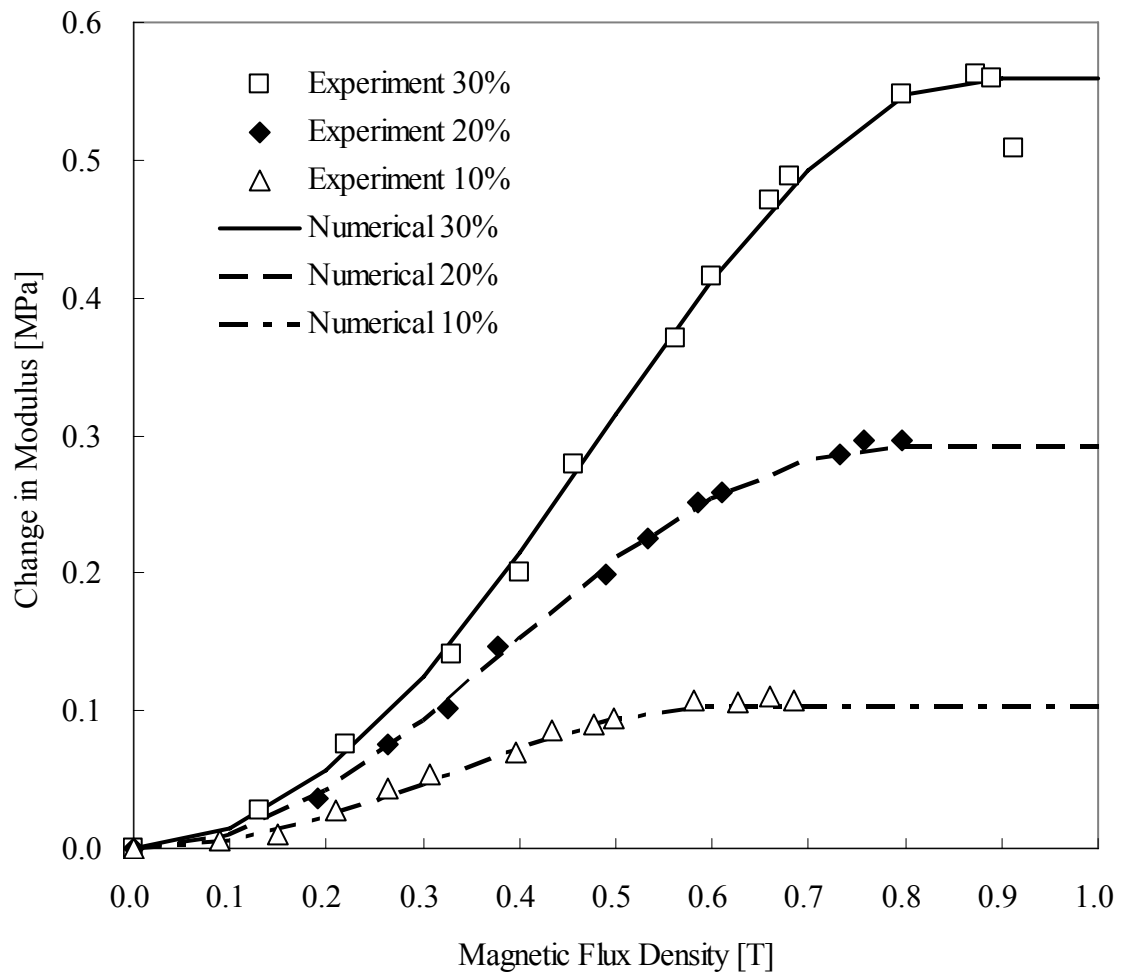


図 5.21 数値実験によるせん断剛性変化量の結果

表 5.7 磁束密度変化に対する各体積密度の材料でのせん断剛性変化率

| 磁束密度 | 30% | 20% | 10% |
|------|------|------|------|
| 0.0 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.1 | 1.01 | 1.01 | 1.02 |
| 0.2 | 1.03 | 1.06 | 1.09 |
| 0.3 | 1.07 | 1.12 | 1.18 |
| 0.4 | 1.12 | 1.21 | 1.28 |
| 0.5 | 1.18 | 1.28 | 1.36 |
| 0.6 | 1.23 | 1.34 | 1.40 |
| 0.7 | 1.27 | 1.38 | 1.39 |
| 0.8 | 1.30 | 1.40 | 1.39 |
| 0.9 | 1.31 | 1.40 | 1.39 |
| 1.0 | 1.31 | 1.40 | 1.39 |

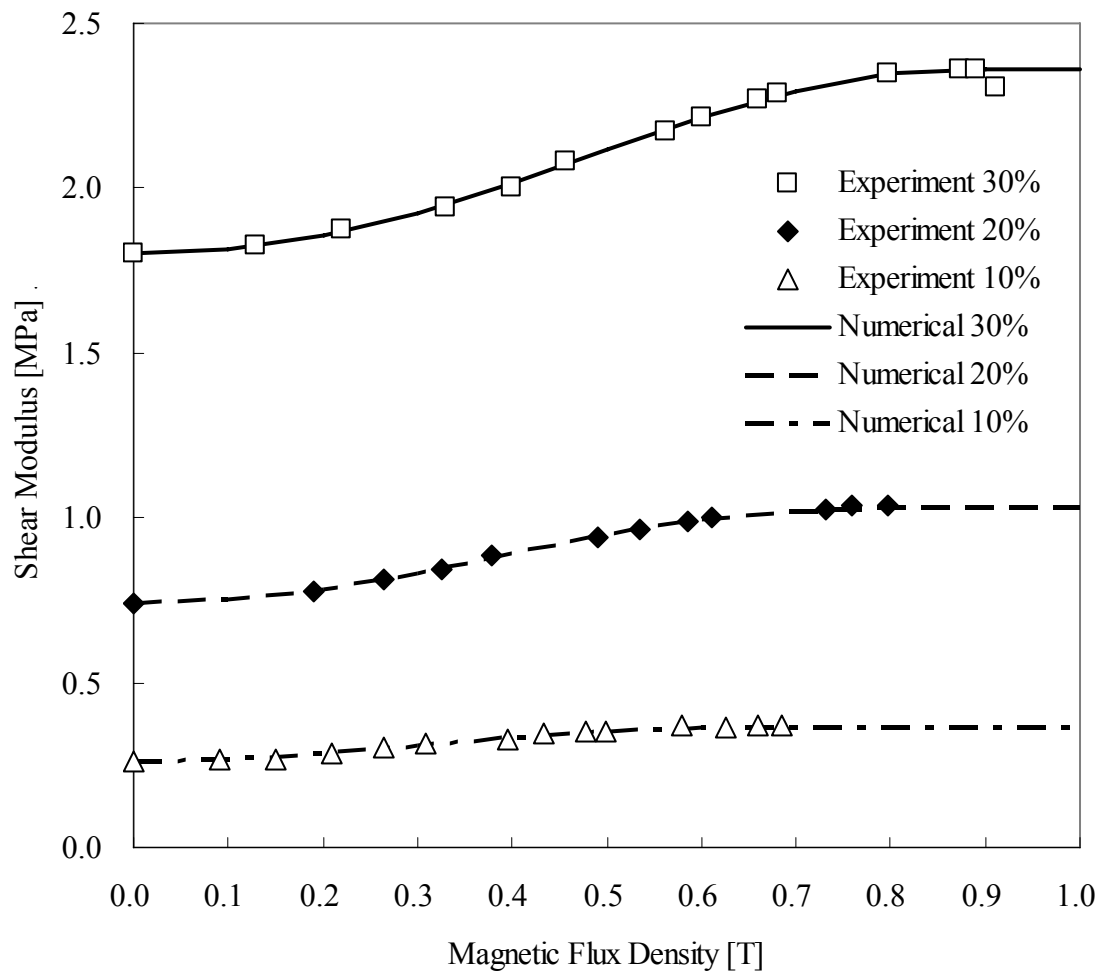


図 5.22 数値実験によるせん断剛性変化の結果

5.4. 結論

磁性粒子を含む磁性エラストマーの変形解析を行うために、Neo-Hooke 則を修正した磁性エラストマーのひずみエネルギー関数を導出し、その材料物性値の同定手法を確立した。外部磁場による剛性変化は、印可磁場力が大きくなることにより鎖状構造を保つための機械的エネルギーが増加するためと考察される。その結果を精度良く取り扱うための磁性超弾性体のひずみエネルギー関数には磁束密度の不変量 I_6 を活用し、磁束密度変化に応じて、見かけのせん断剛性が変化する形式とした。さらに、磁場が飽和することで剛性値の変化が見られなくなる領域まで考慮できるように Langevin 関数をひずみエネルギー関数に組み込んだ。そして、磁性エラストマーの変形モードはせん断モードが支配的であることから、せん断試験からそのひずみエネルギー関数の材料物性値を同定する手法を確立した。

ひずみエネルギー関数と材料物性値の同定手法を検証するために磁性粒子を含む磁性エラストマーの試験片の作製方法について述べた。本研究では磁性粒子の懸濁がうまく行われず、凝集を防ぎ均一に充填するためには界面活性剤などの使用が不可欠であることがわかった。さらに磁性エラストマーは、熱硬化させる際にも磁場を与えて、磁性粒子が揃った状態で形成することで、より強い磁場依存性を持たせることができるが、今回の実験では、試験片の熱硬化時には磁場中での形成を行えなかったため、磁性粒子はランダムに配置されたと考えられる。このランダムな磁性粒子の配置においても、体積密度 2% の試験片に 0.4T の外部磁場を与えることで、1.65 倍のせん断剛性変化を得ることができた。材料形成時にも磁場を加えることで、磁場によるせん断剛性変化を大きくさせることが可能であると考えられる。また、磁場中で形成された磁性エラストマーは粒子配向を持ち、外部磁場を与えなくても異方性の挙動が得られるので、工業的に有効利用される設計手法として考えられる。

作製した試験片に外部磁場を与えた状態で、純せん断試験を行った結果の応力-ひずみ曲線から、本研究で考案した材料物性値の同定手法を用いて材料物性値を導出し、有限要素法により数値解析を行った。その結果、有限要素法解析プログラムには磁性エラストマーのひずみエネルギー関数と材料物性値を組み込み、純せん断試験を再現し、実験値と一致する結果を得ることができた。実験値と解析結果は精度良く一致しており、本研究で考案した数値計算手法が有効であるといえる。また、既に公開されている単純せん断試験についても材料物性値の同定を行い、数値計算手法の有効性を示した。

第6章 磁場応力連成解析

第5章において、磁場に依存して剛性が変化する超弾性体の基本変形モードでの実験結果と数値解析例を示した。しかし、実構造物においては、単調な磁場を与えることは逆に困難であり、磁気勾配が現れる。このような磁束密度の勾配が存在する場において、磁性エラストマーの機械的剛性は領域毎に変化するため、構造物の特性を得るためには、試作品を作成し実験をしなければならない。従って、磁場応力連成解析の必要性は重要であり、製品設計のために試作・実験を減少させることができ、さらには様々な角度からの検討項目を得ることができる。

そこで、本章では実構造物に対応するための磁場応力連成解析の適用とその数値解析事例について論ずる。

6.1. 磁性エラストマーを用いたサスペンションブッシュ

図 6.1 に磁性エラストマーを使用した自動車サスペンションブッシュを示す。図 6.2 に示す自動車のサスペンションは、様々な金属製の伝達部品で構成されている。この伝達部品のボディまたは伝達部品同士の接合部には、ゴムブッシュといわれるエラストマーで形成される比較的柔らかい部品が使われている。このゴムは、走行中の衝撃音や振動を車内に伝えない効果がある反面、圧縮されたり、ねじれたりして、タイヤは不必要な方向に勝手に動いてしまう場合がある。しかし、これではサスペンション本来の性能を最大限に発揮する事が出来ない。従って、このゴムブッシュを強化型のゴムブッシュとすることで、不要なアライメント変化を軽減して正確なコーナリングと直進安定性の飛躍的な向上が望まれる。しかし、一定の剛性のままでは路面状態や走行速度などによっては、快適性の悪化やその操作性が悪化する場合がある。そこで、図 6.1 に示すように磁性エラストマーをゴムブッシュとして使用することで、路面状況に応じて剛性を変化させて、より快適な運転性能を実現できるものとして、近年採用されつつある。内筒とゴムの間には多重に巻かれたワイヤコイルが配置されており、そのコイルに電流を印可することで磁場を形成する。磁場変化による剛性変化は瞬時に行われるので、外部からの振動などを瞬時に吸収できるよう制御される。図 6.3 に印可電流と半径方向の剛性変化を■，軸方向の剛性変化を●で示す [56]。印可電流に対して剛性が線形に増加していることが示されている。本章ではこの磁性エラストマーを使用したゴムブッシュを例に取り、2次元軸対称場において仮想的な磁場と変位挙動を与えた磁場応力連成解析を行い、その特性について検討する。

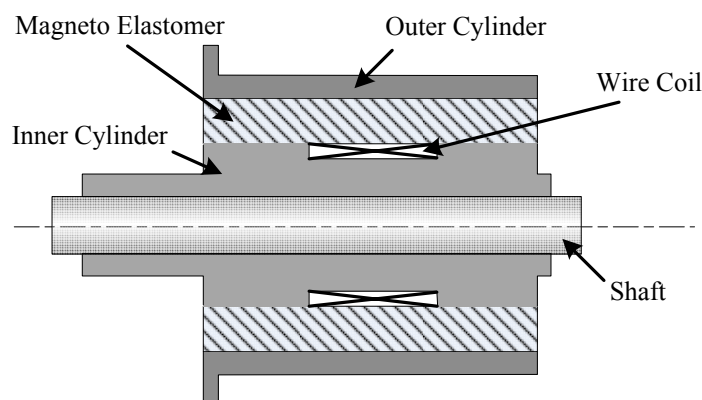


図 6.1 サスペンションブッシュ

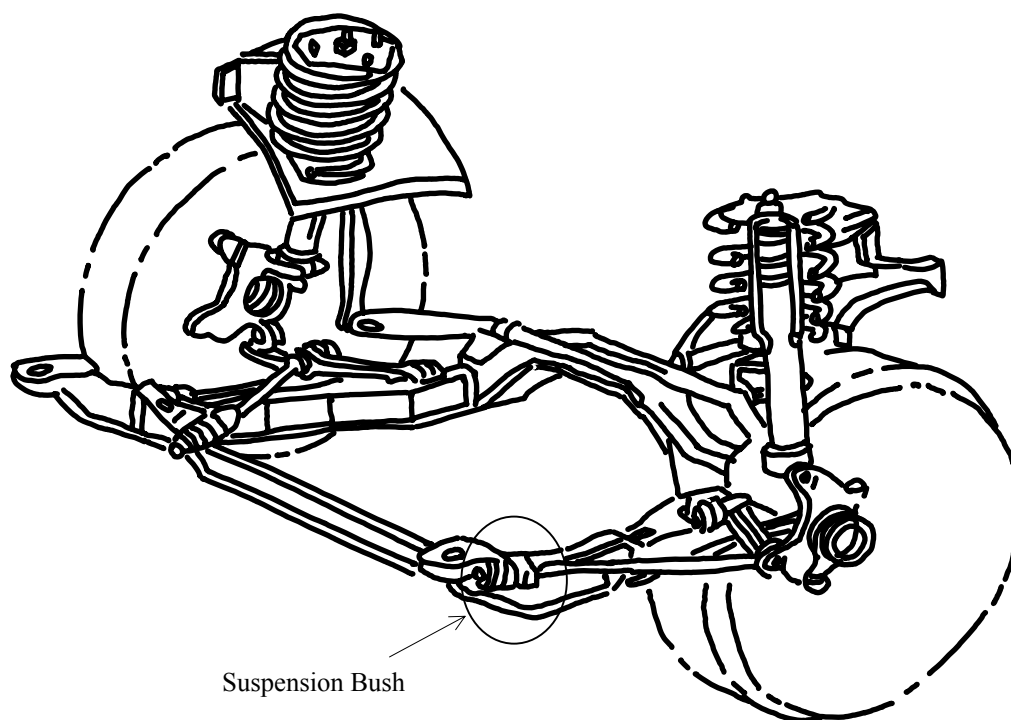


図 6.2 自動車サスペンション

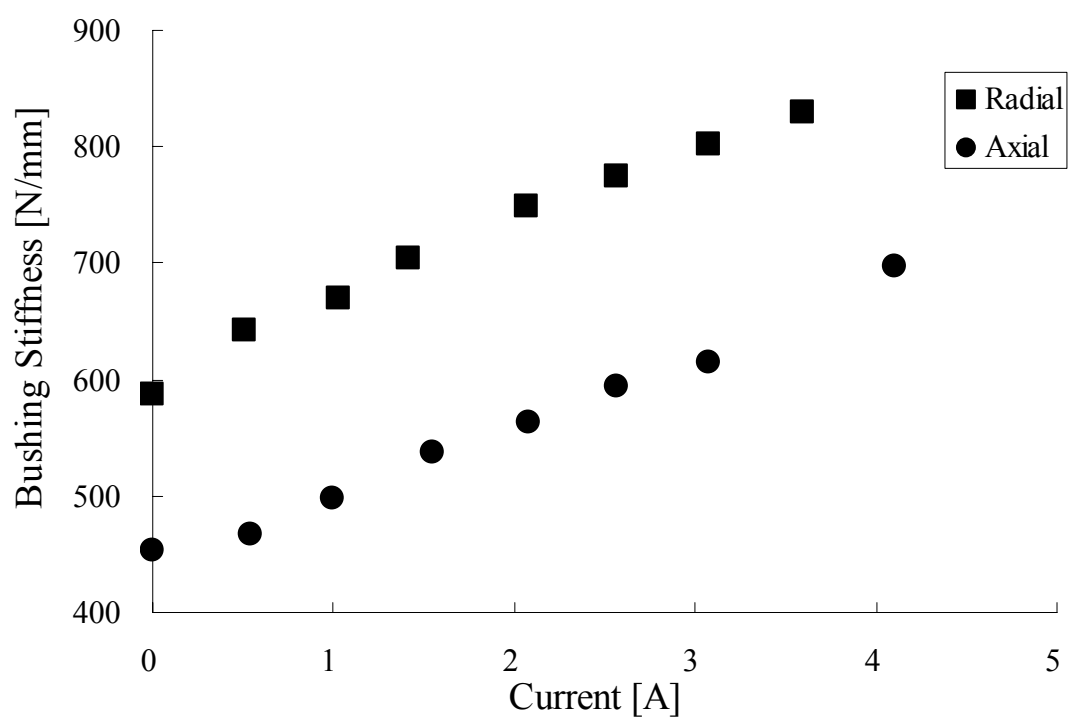


図 6.3 印可電流に対する剛性変化

6.2. 磁束密度勾配を考慮したひずみエネルギー関数

第5章では、磁束密度の大きさである磁場の不変量 I_0 を基本として、見かけのせん断剛性を変化させることにより、外部磁場による剛性変化を捉えられるようにひずみエネルギー関数を導出した。本章では、磁場解析で得られた磁束密度の方向を示す磁場の不変量 I_4 をひずみエネルギー関数に組み込むことで、より磁場に対する依存性を高めた。本研究でのひずみエネルギー関数を式(6.1)に示す。

$$W = \frac{1}{2}G(I_1 - 3) + \frac{1}{2}\mu_0^{-1}\gamma I_4 \quad (6.1)$$

考案したエネルギー関数には、最も単純なNeo-Hooke則を基準として、磁束密度の方向と大きさを表す不変量 I_4 を組み込んだ。第一項は材料の母剤であるエラストマーの機械的な挙動を表す項であり、第二項は外部磁場によって発生するマクスウェル応力を表す磁場的なひずみエネルギー関数を表す項である。第5章で考案した式(5.2)のひずみエネルギー関数では、見かけのせん断剛性である G を磁束密度の大きさに依存させた形式としたので、方向による剛性の異方性は表現できなかった。本章で提案する式(6.1)のひずみエネルギー関数では、見かけのせん断剛性は一定値を取るが、磁束密度による剛性変化は不変量 I_4 を含む右辺第二項で取り扱うので、磁束密度ベクトルの方向に配向強化された繊維複合材料と等価な特性を持ち、その配向方向の剛性の大きさは各物質点での磁束密度の大きさに比例することで、磁束密度変化に対してより敏感な特性を取ることが可能となる。

6.3. 磁場応力連成解析

本研究では磁場応力連成解析を弱形式で取り扱った。図6.4に解析の流れを示す。まず、磁場解析をあらかじめ行い、その結果である磁束密度あるいは磁場の強さを応力解析の場の変数として取り込み、その変数に依存する材料物性や境界条件として取り扱う。この時、磁性エラストマーの構造部分についてのみ、磁束密度等の変数が引き渡される。また、磁場解析では空気層の有限要素が必要であるが、応力解析では必要としない。本手法のように、連成解析を弱形式として取り扱うことにより、磁場解析と応力解析を分離できる。従って、本手法での応力解析では構造部分のみを有限要素でモデル化すればよいので、計算時間を大幅に短縮できる。

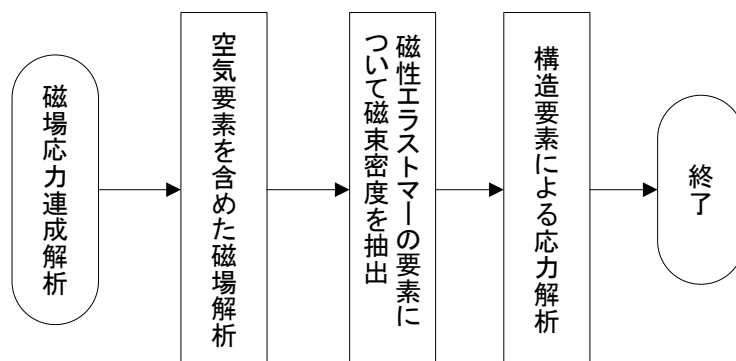


図 6.4 連成解析フローチャート

6.4. 数値実験

図 6.5 に示す磁性エラストマーを使用したサスペンションブッシュを例として，仮想的な条件を与えて，2 次元軸対称場での磁場応力連成解析による数値実験を行う．ゴムブッシュの内径を $r_1 = 13\text{mm}$ ，外径を $r_2 = 23\text{mm}$ ，長さは $l = 44.2\text{mm}$ の寸法を想定する．このとき，筒型防振ゴムの理論解 [57] から，ゴム材料のせん断剛性を $G = 1.0\text{ N/mm}^2$ としたとき，磁場の影響がない場合の，見かけのせん断剛性 G_{ap} と軸方向の剛性 k は次式で得られる．

$$G_{ap} = \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_2 - r_1}{l} \right)^2 \right]^{-1} G = 0.98322 \left[\text{N/mm}^2 \right] \quad (6.2)$$

$$k = \frac{2\pi l G_{ap}}{\ln(r_2/r_1)} = 478.59 \left[\text{N/mm} \right] \quad (6.3)$$

6.4.1. 静磁場解析

磁場解析の有限要素メッシュを図 6.6 に示す．サスペンションブッシュと周辺の空気の要素は四辺形軸対称要素を用いてメッシュ分割した．空気層を示す要素の外周の磁気ベクトルポテンシャルを拘束し，コイル部分の要素辺に線電流密度 4000 A/m の境界条件を与えた．磁場解析での材料物性値として，空気層，内外筒ならびにコイルには，真空の透磁率 $\mu_0 = 1.25664 \times 10^{-6}\text{ H/m}$ を与えた．鉄の透磁率は一般に真空の透磁率の 5000 倍であるので，磁性エラストマーの磁性粒子の体積密度は 40% と仮定して， $\mu = 1.25664 \times 10^{-6} \times 5000 \times 0.40 = 2.51327 \times 10^{-3}\text{ H/m}$ の透磁率を与えた．表 6.1 に領域毎の要素数を示す．

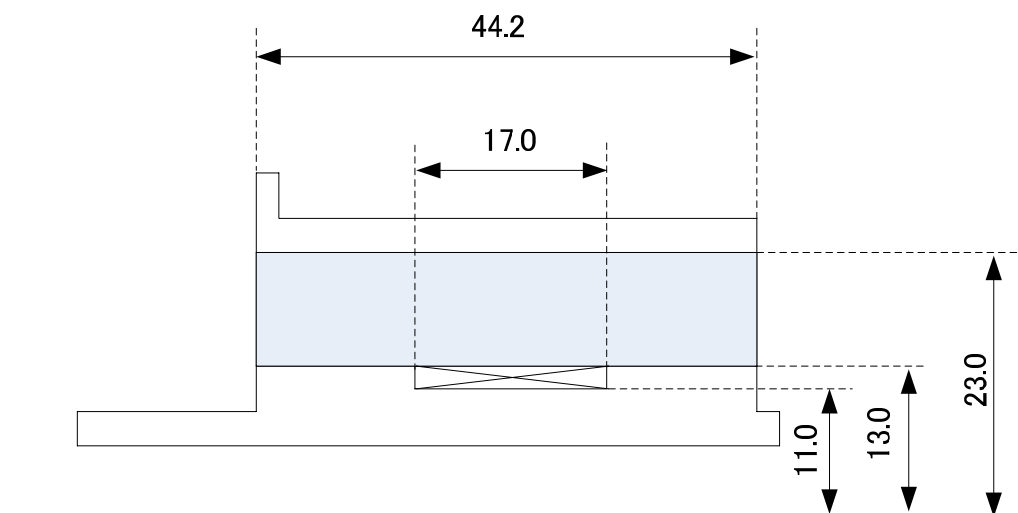


図 6.5 サスペンションブッシュ

表 6.1 領域毎の要素数

| | |
|----------|------|
| 磁性エラストマー | 440 |
| コイル | 34 |
| 内筒 | 328 |
| 外筒 | 140 |
| 空気層 | 1722 |

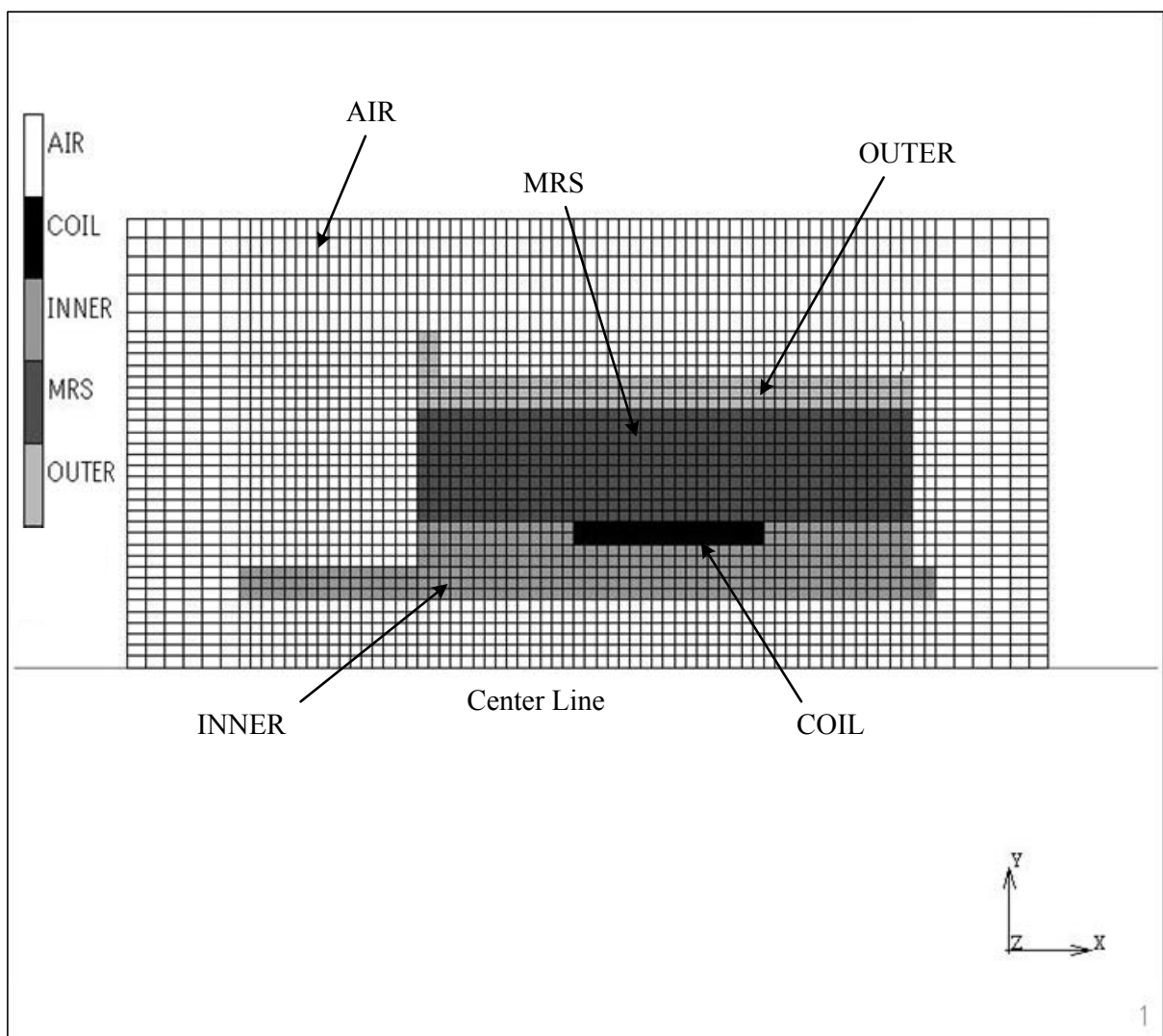


図 6.6 磁場解析有限要素モデル

6.4.2. 応力解析

応力解析における有限要素モデルを図 6.7 に示す。応力解析において、空気層は不要であるので、実構造物のみをメッシュ分割した。本数値実験において、磁性エラストマーのゴムのせん断剛性は一般的な値を用いて $G = 1.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ とし、磁束密度変化の材料物性値は無次元数であり、 $\gamma = 1.0$ とした。また、内外筒部はアルミ材を想定し、ヤング率 $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.345$ を用いた。コイル部分は銅を想定し、ヤング率 $E = 1.3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.343$ を用いた。外筒は完全拘束とし、内筒に軸方向 1mm の強制変位を与えた。応力解析は次の 4 つの磁場境界条件を想定して行った。

- (A) 磁場解析で得られた磁束密度を応力解析の変数とする磁場応力連成解析
- (B) 磁場の影響が全くない状態での応力解析
- (C) 軸方向に一樣な磁場を想定した磁場応力連成解析
- (D) 半径方向に一樣な磁場を想定した磁場応力連成解析

条件 C と D での磁束密度の大きさは、A による磁場解析で得られた磁束密度の最大値とした。

6.4.3. 解析結果

磁場解析の結果を図 6.8 に示す。コイルに電流を与えたときの磁束密度分布が得られている。一般的にはコイル内部に鉄芯を挿入することでコイル内部の磁場の強さを高めるが、本計算例でのサスペンションブッシュはコイル外側に磁性体が配置されているため、コイル外側の磁性エラストマーの領域にも比較的強い磁場が形成されている。磁性エラストマーのみの磁束密度分布を図 6.9 に示す。

応力解析において、磁場の境界条件を変更して行った 4 ケースのそれぞれの解析結果の反力から軸方向の剛性を算出した値を表 6.2 に示す。条件 B による解は式 (6.3) に示す理論解と比較して 3% の誤差であり、磁場を考慮しない条件で精度の良い解が得られていることを示している。磁場応力連成解析結果から条件 D の半径方向に一樣な磁場を想定した初期条件を用いた場合に、軸方向剛性が最も大きい結果となった。条件 D では、半径方向のマクスウェル応力が発現するため、この応力に対抗して軸方向に負荷を与えるには大きなエネルギーを必要とするので、軸方向への剛性は条件 D が一番大きい結果となったと考えられる。また、条件 A による磁場解析の磁束密度分布を想定した場合には、磁場の影響がない状態に対して 48% 増の剛性が得られた。図 6.10 に全体モデルの変形図を示す。図 6.11 から図 6.17 に各解析モデルでの磁性エラストマーの構造部分の変形図上に、軸方向応力・半径方向応力・周方向応力・面内せん断応力・最大主応力・最小主応力・相当応力の等高線図を示す。特に、図 6.15 (A) に示す磁場応力連成解析の最大主応力分布図において、コイル周辺において強い引張場が形成されていることがわかる。繰り返し負荷による疲労損傷などは、最大主応力の影響をうけるので、実用的な使用条件での疲労寿命の予測に本解析手法が有効であるといえる。

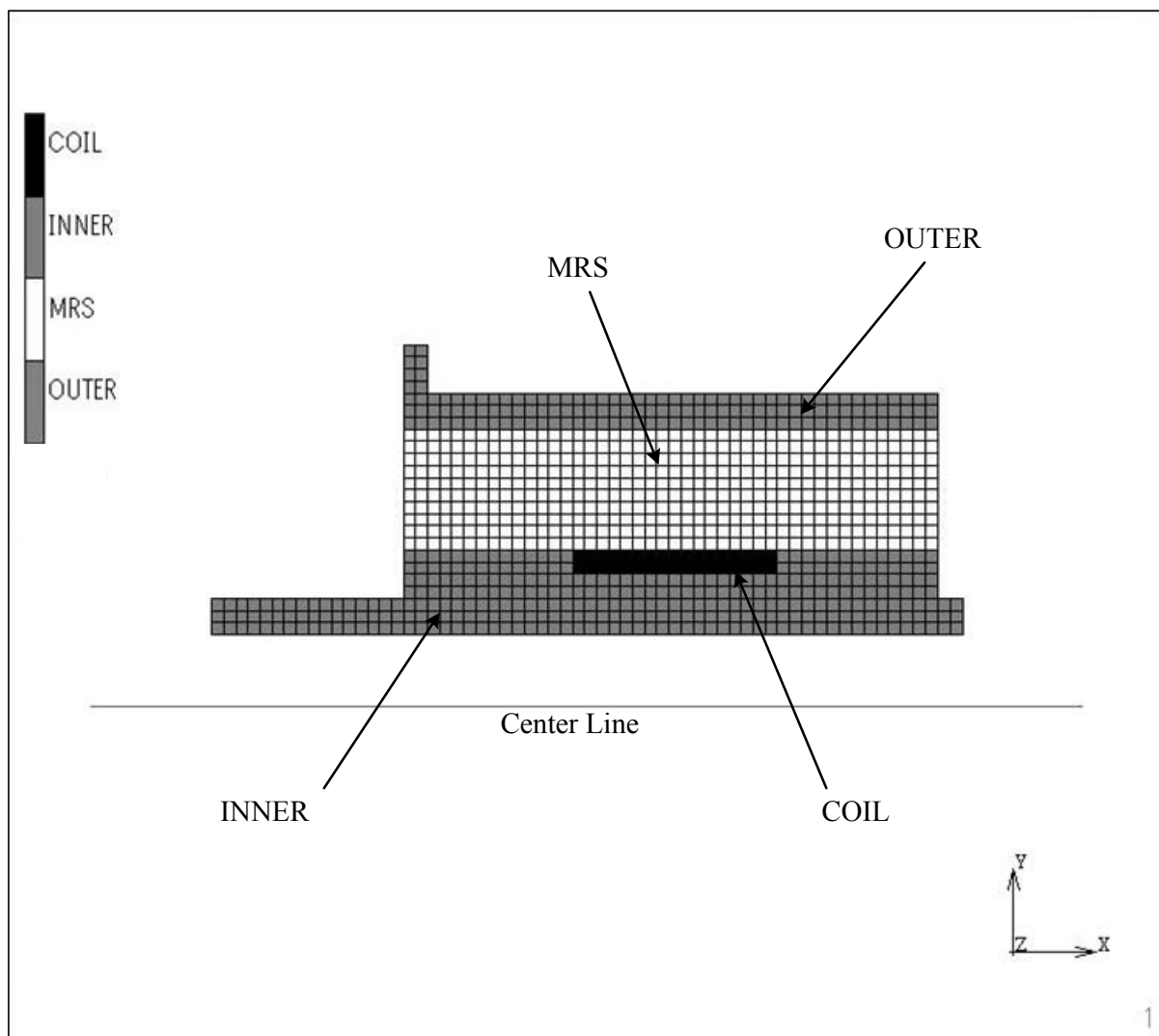


図 6.7 応力解析有限要素モデル

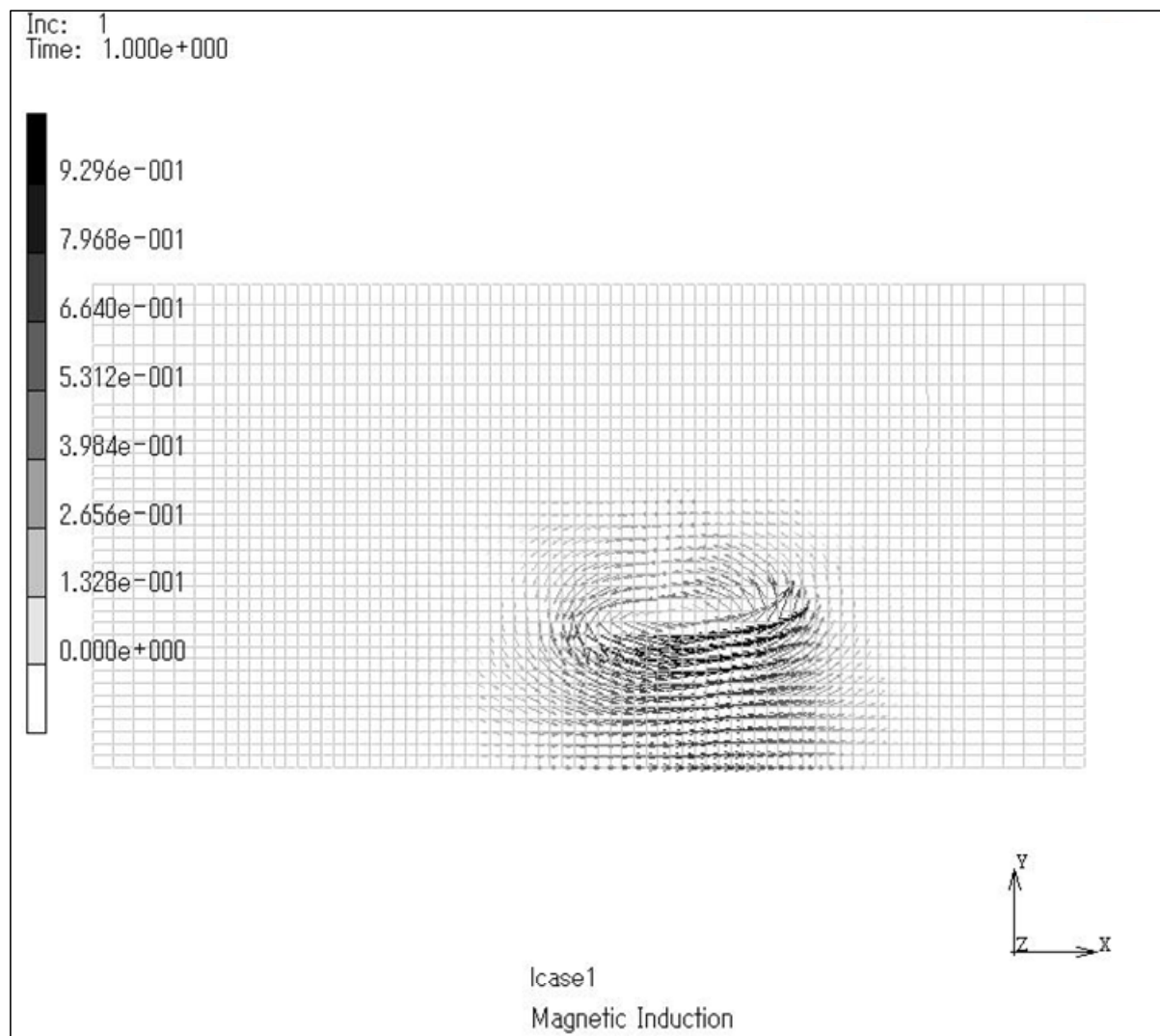


图 6.8 磁束密度分布

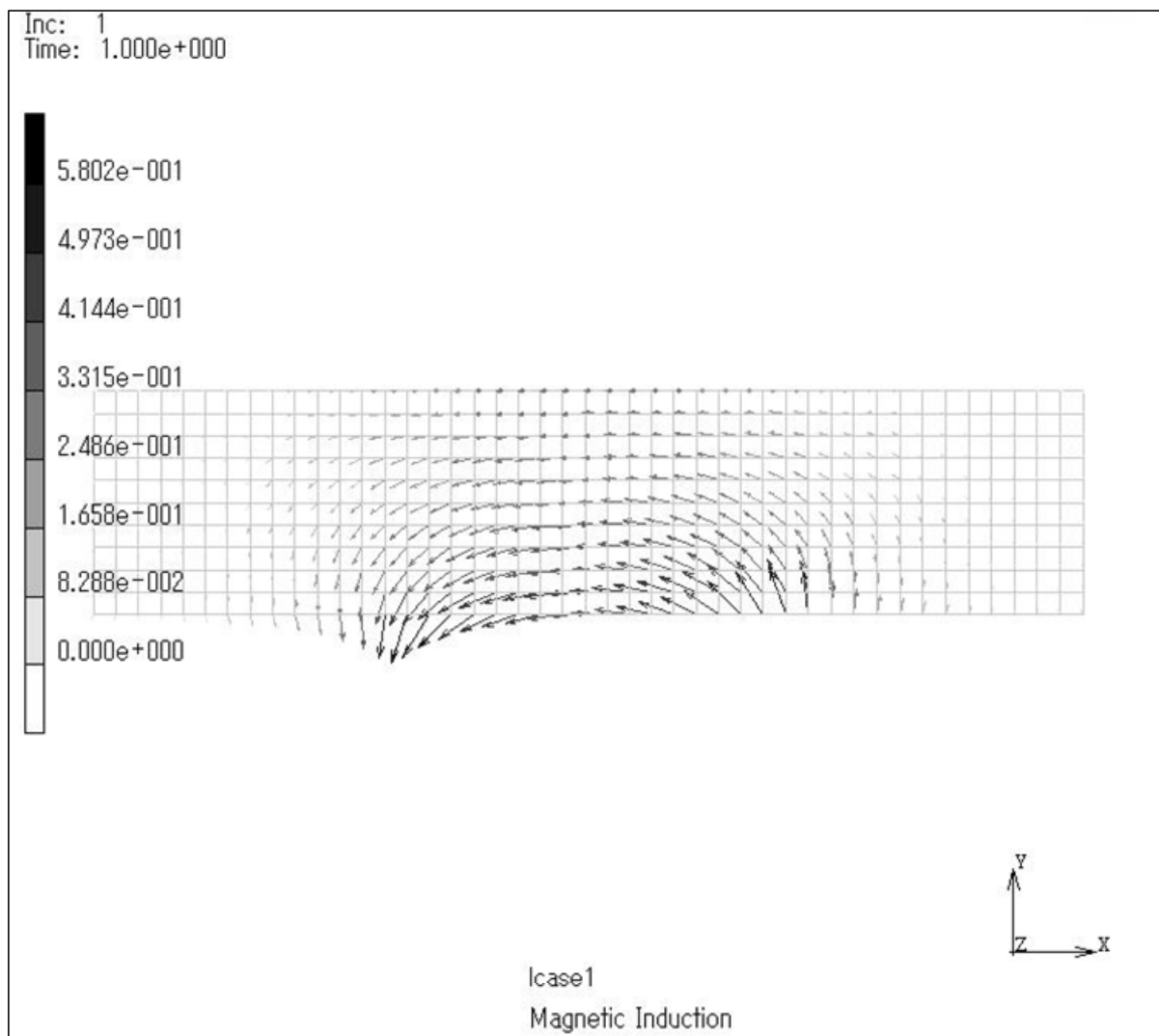


図 6.9 磁束密度分布 (磁性エラストマー)

表 6.2 軸方向剛性

| 解析モデル | 軸方向の剛性 [N/mm] |
|------------------|---------------|
| A) 磁場応力連成解析 | 686.1 |
| B) 磁場の影響を考慮しない解析 | 463.3 |
| C) 軸方向均一な磁束密度分布 | 472.7 |
| D) 半径方向均一な磁束密度分布 | 997.3 |

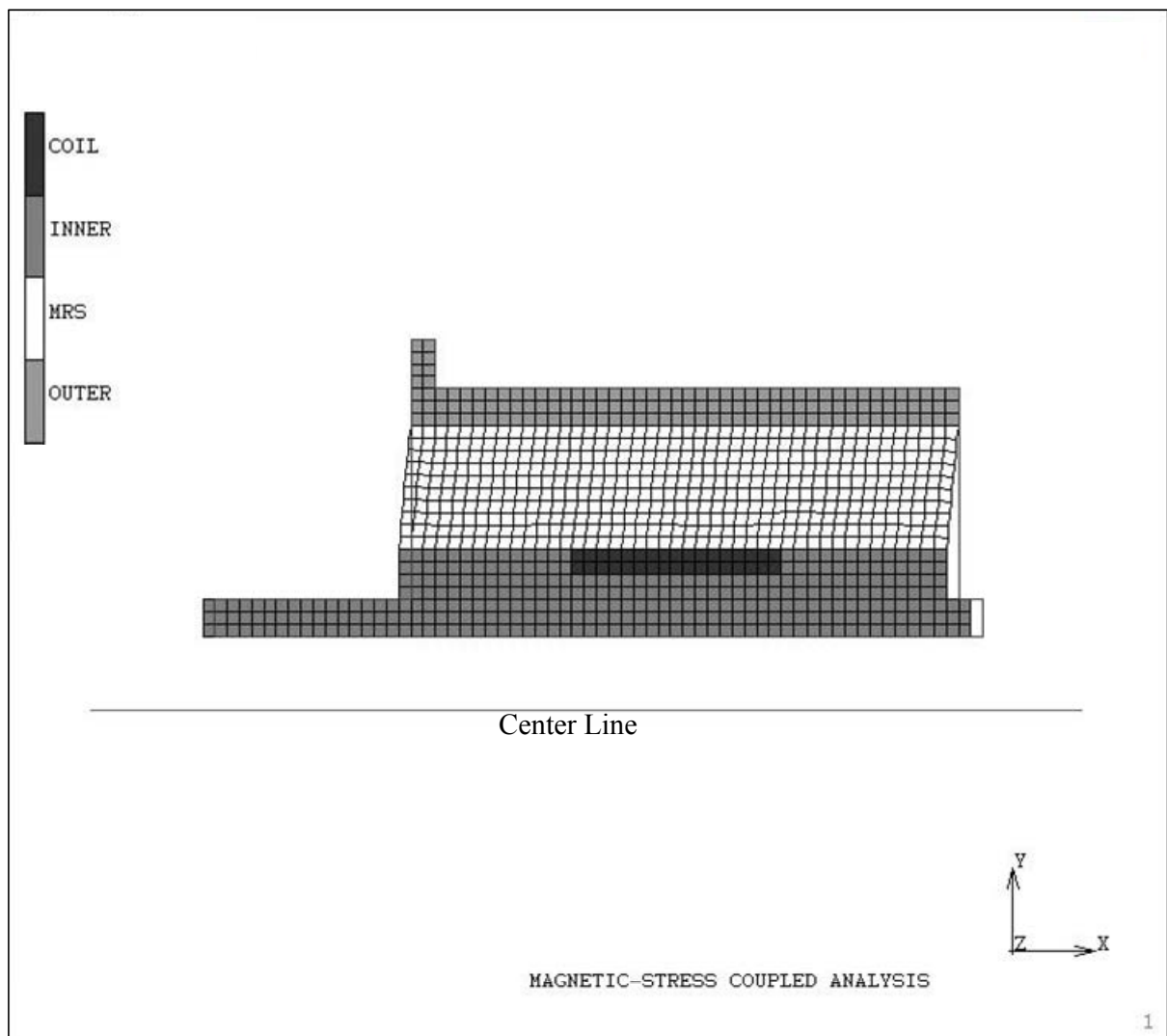
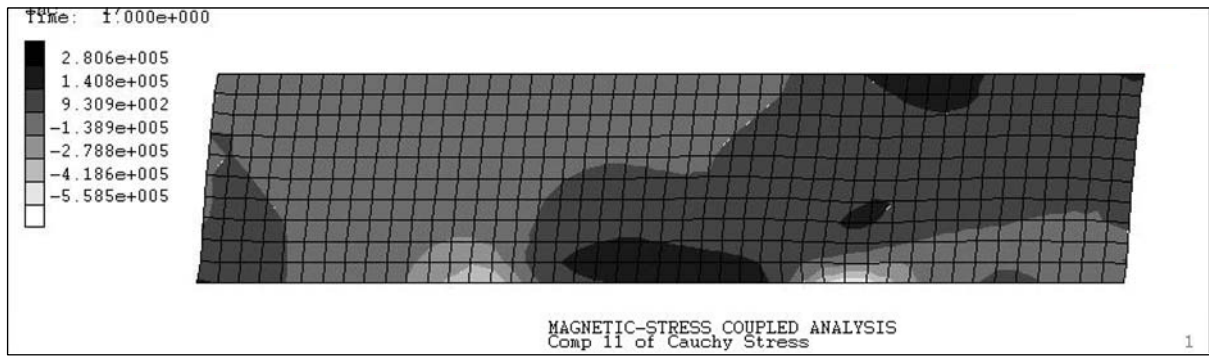
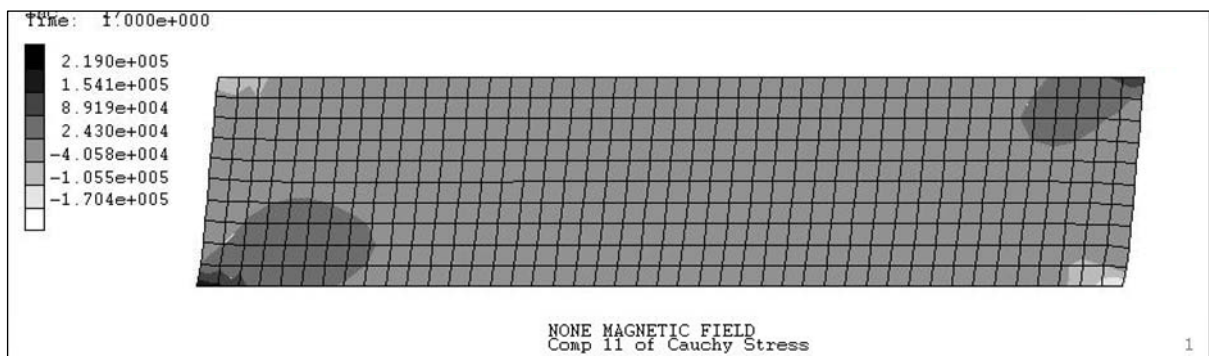


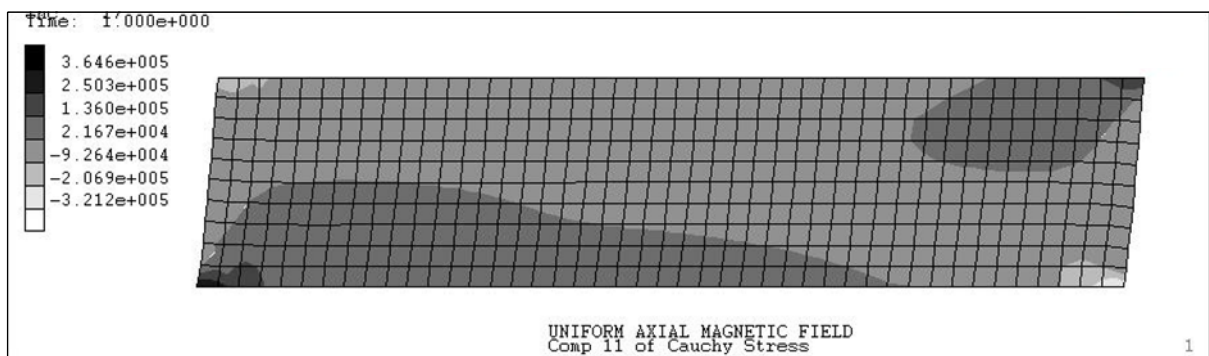
図 6.10 変形図（全体モデル）



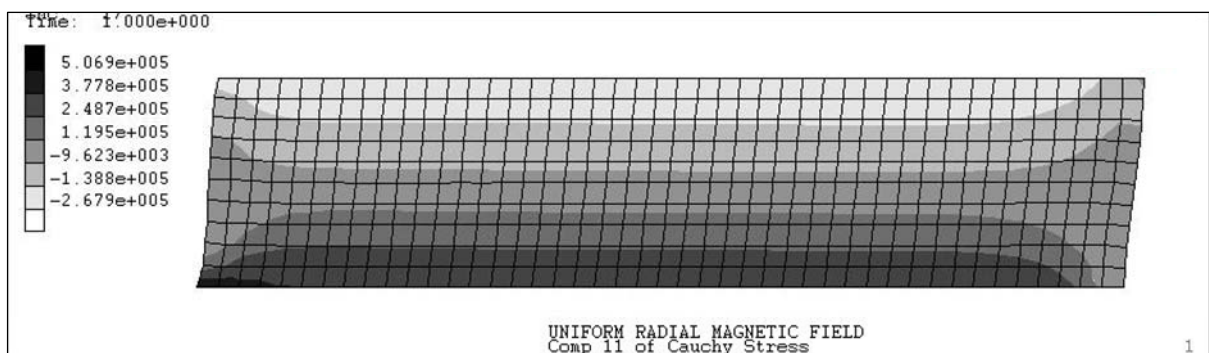
(A) 磁場応力連成解析



(B) 磁場なし



(C) 軸方向均一磁場

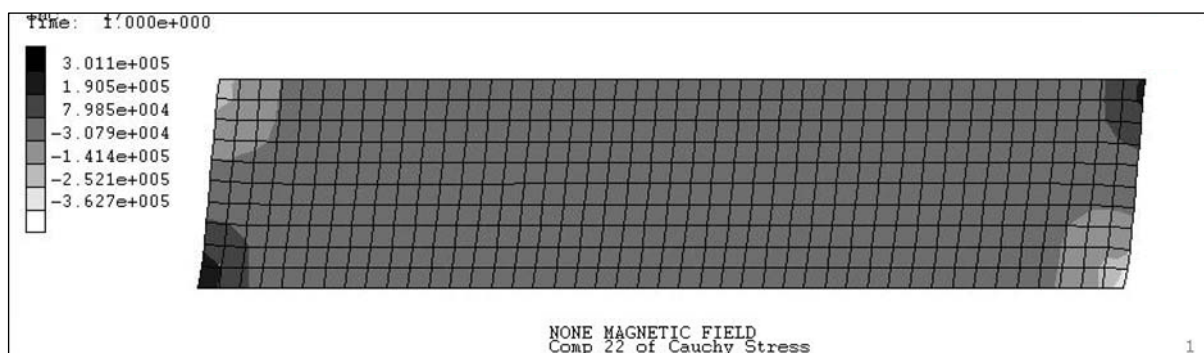


(D) 半径方向均一磁場

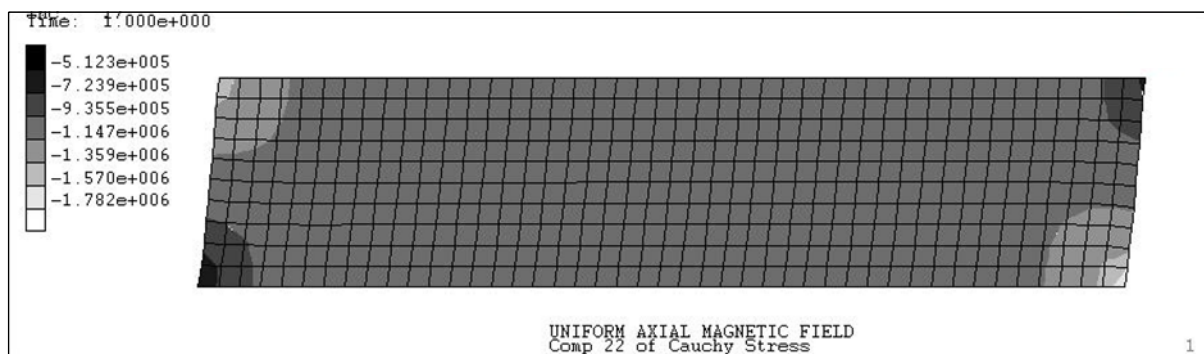
図 6.11 軸方向応力等高線図



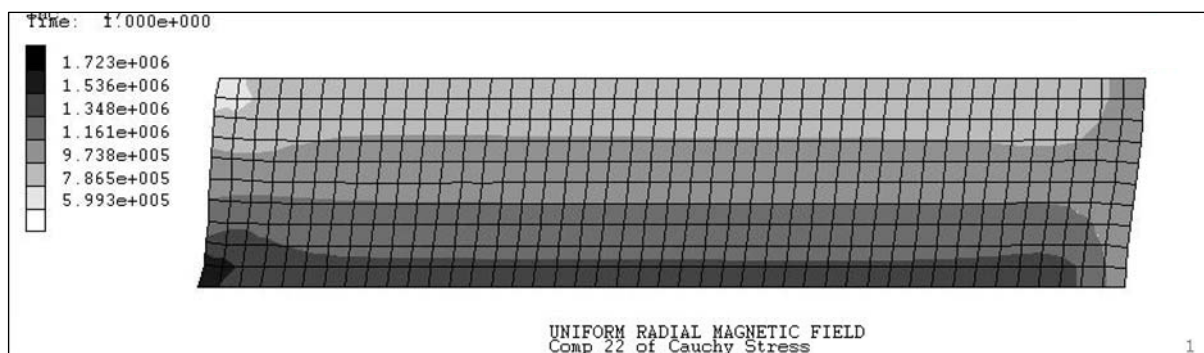
(A) 磁場応力連成解析



(B) 磁場なし

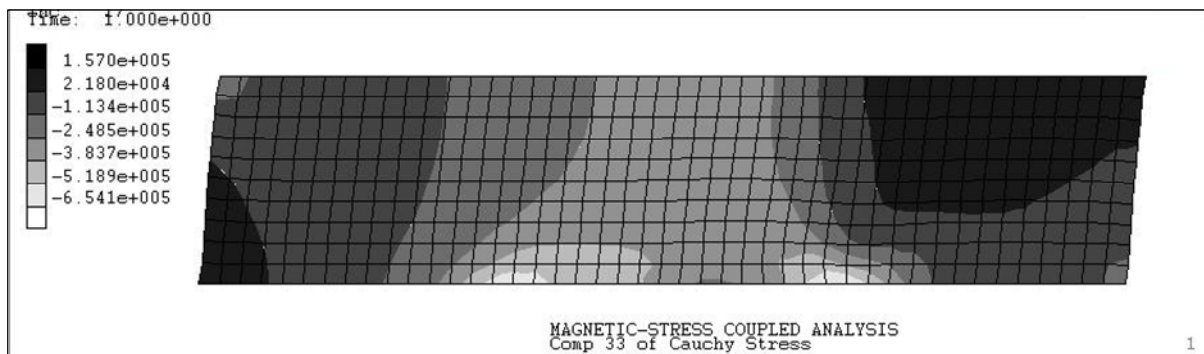


(C) 軸方向均一磁場

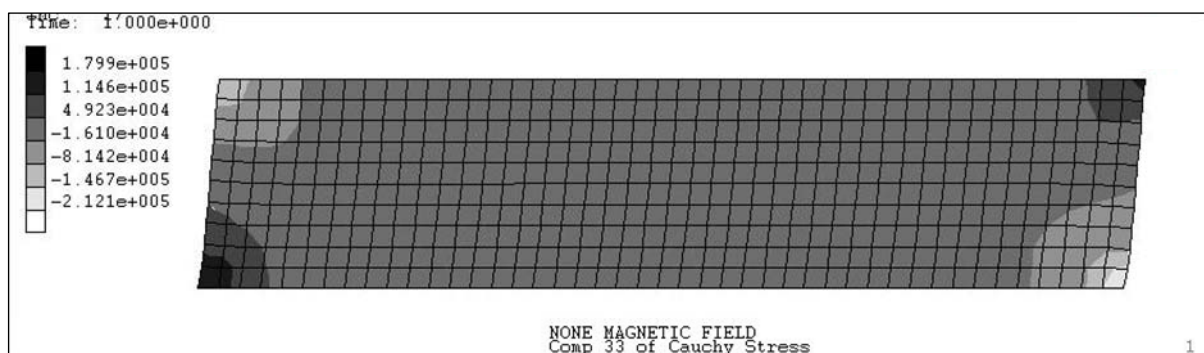


(D) 半径方向均一磁場

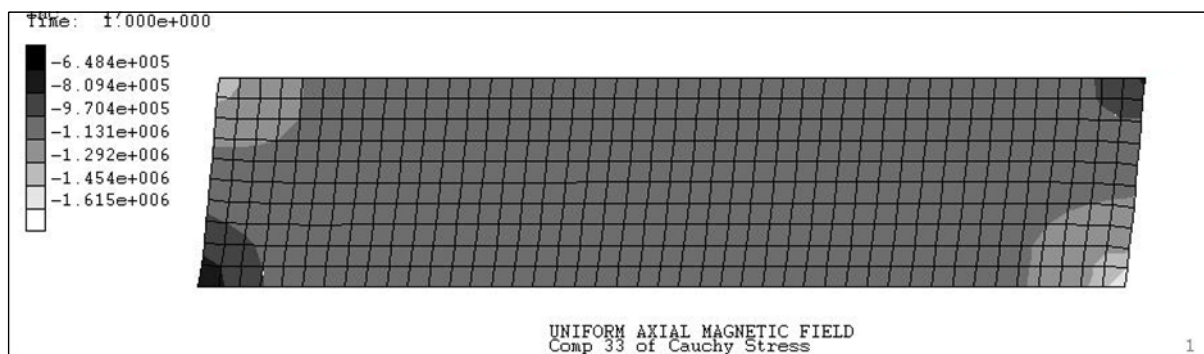
図 6.12 半径方向応力等高線図



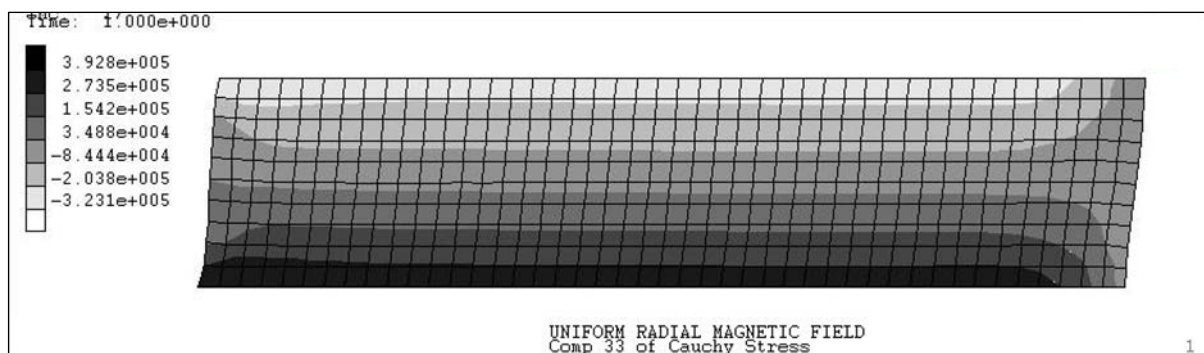
(A) 磁場応力連成解析



(B) 磁場なし

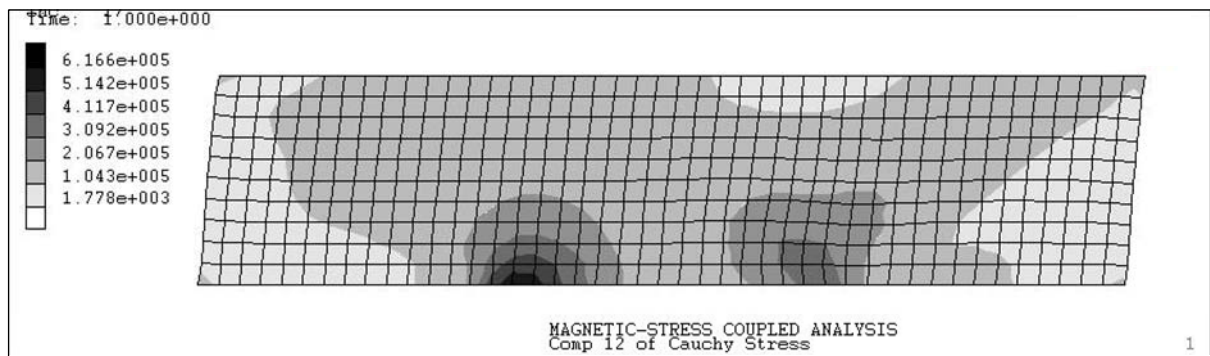


(C) 軸方向均一磁場

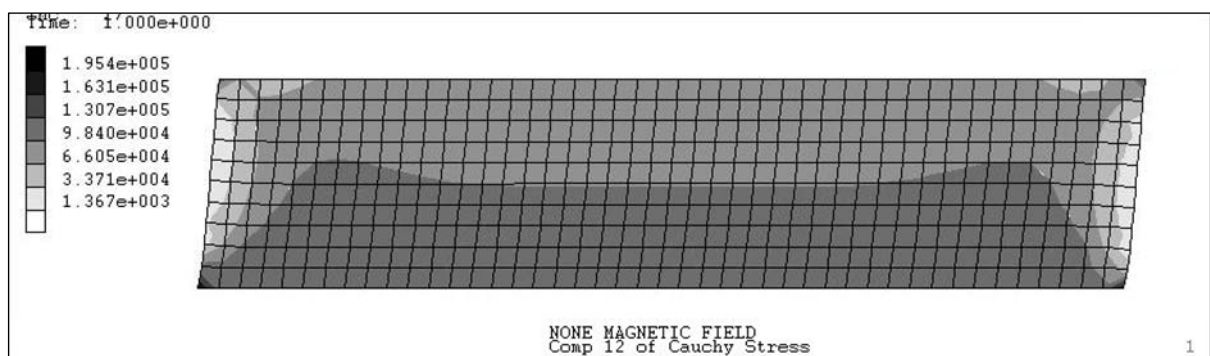


(D) 半径方向均一磁場

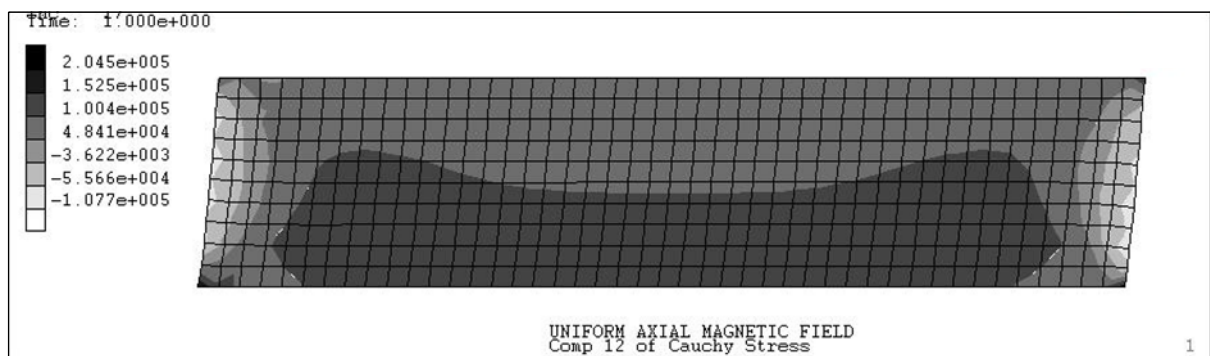
図 6.13 周方向応力等高線図



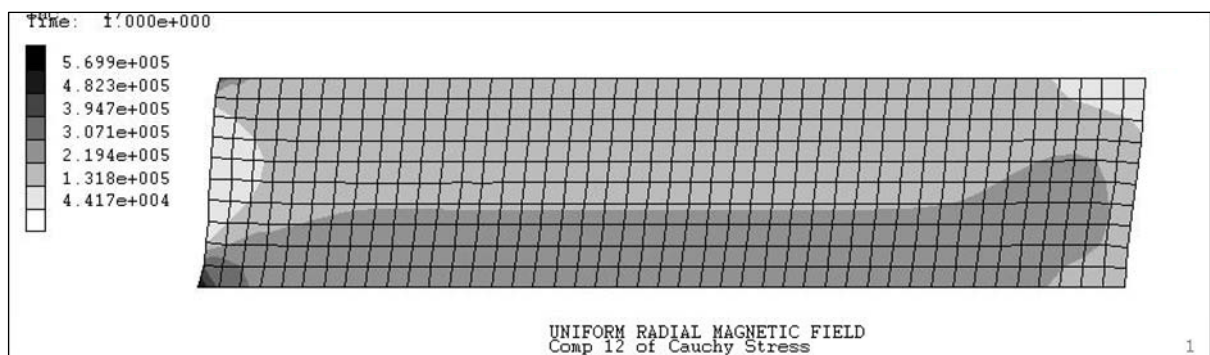
(A) 磁場応力連成解析



(B) 磁場なし

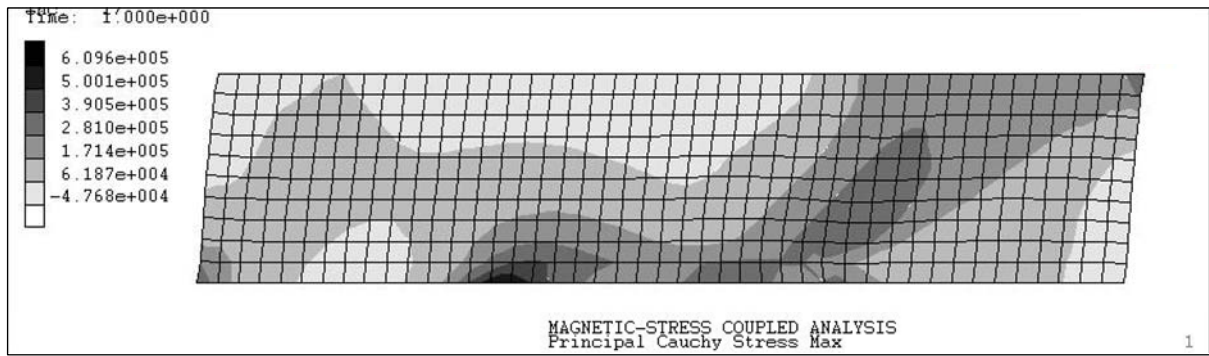


(C) 軸方向均一磁場

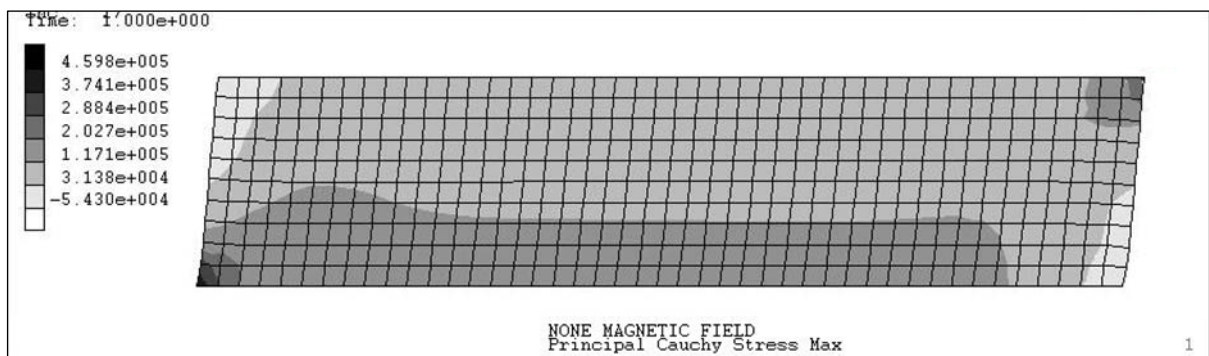


(D) 半径方向均一磁場

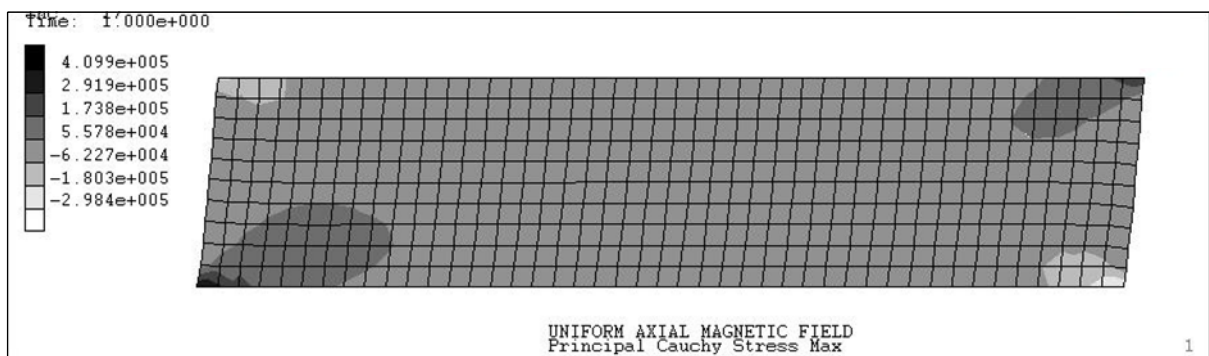
図 6.14 面内せん断応力等高線図



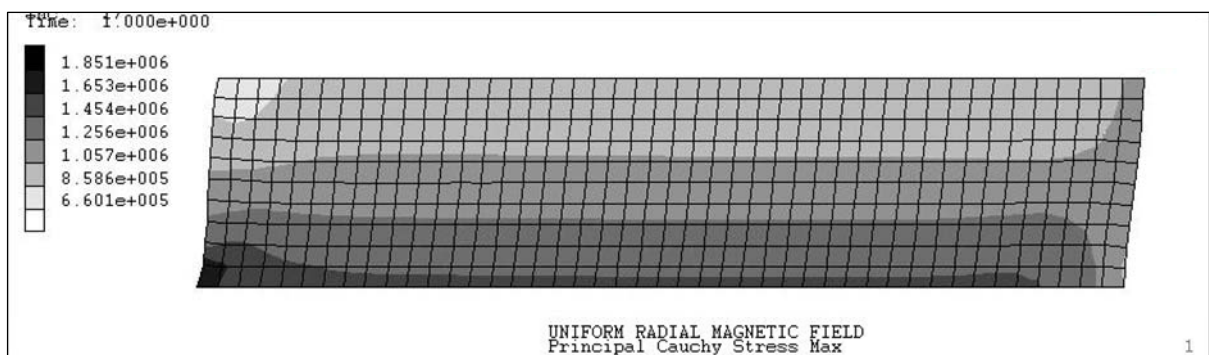
(A) 磁場応力連成解析



(B) 磁場なし

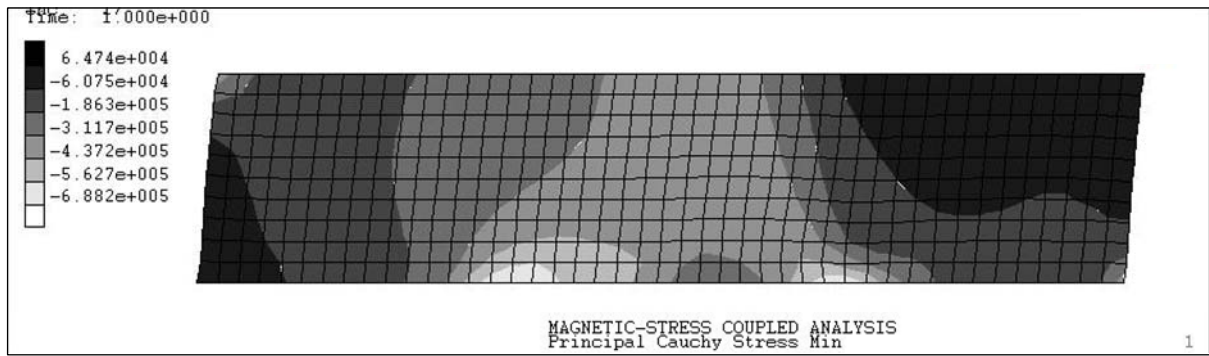


(C) 軸方向均一磁場

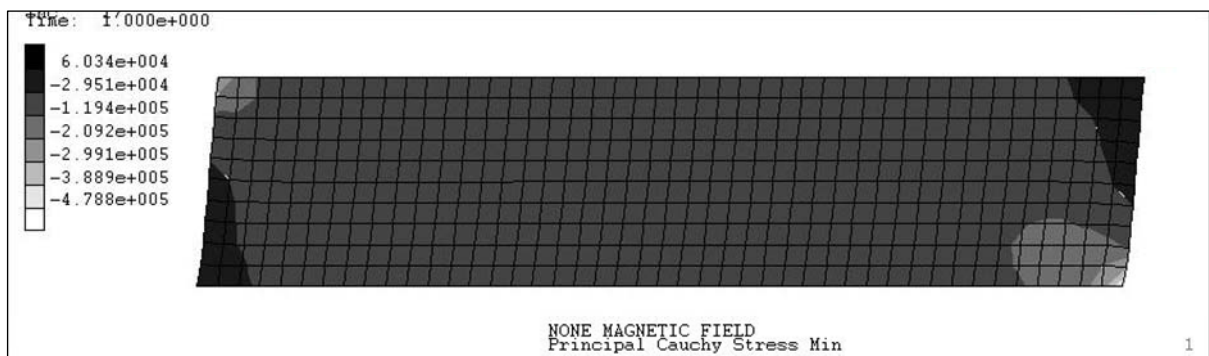


(D) 半径方向均一磁場

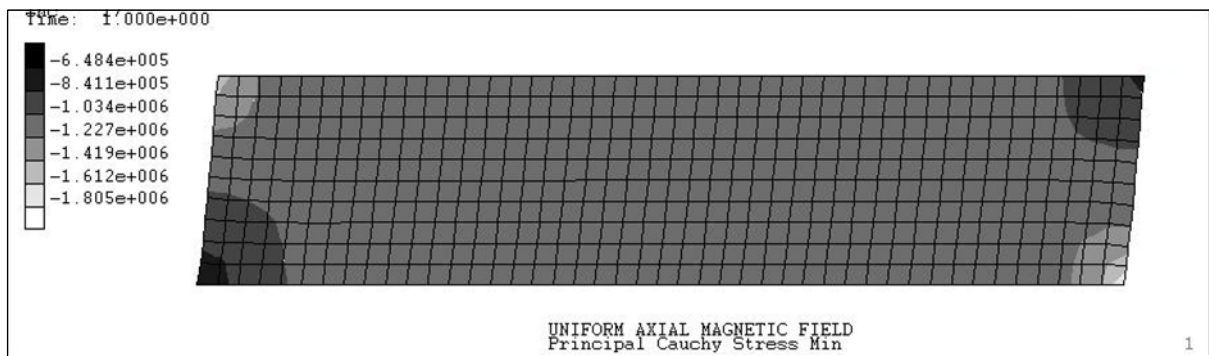
図 6.15 最大主応力等高線図



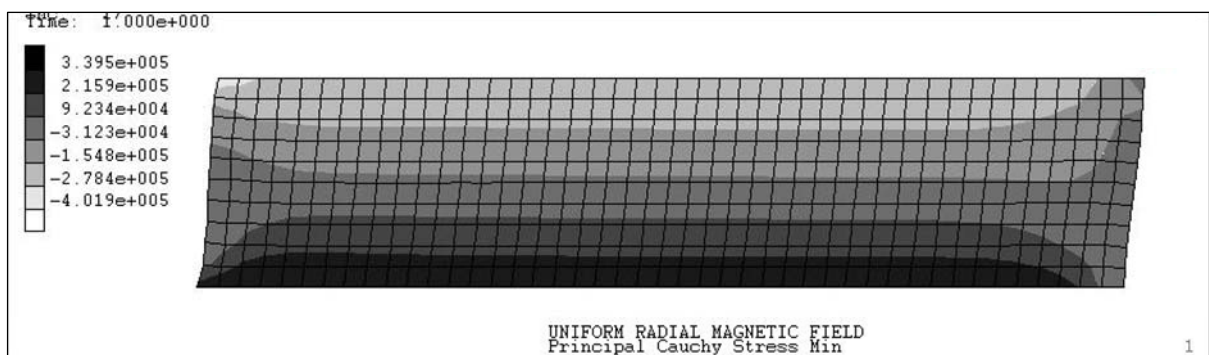
(A) 磁場応力連成解析



(B) 磁場なし



(C) 軸方向均一磁場

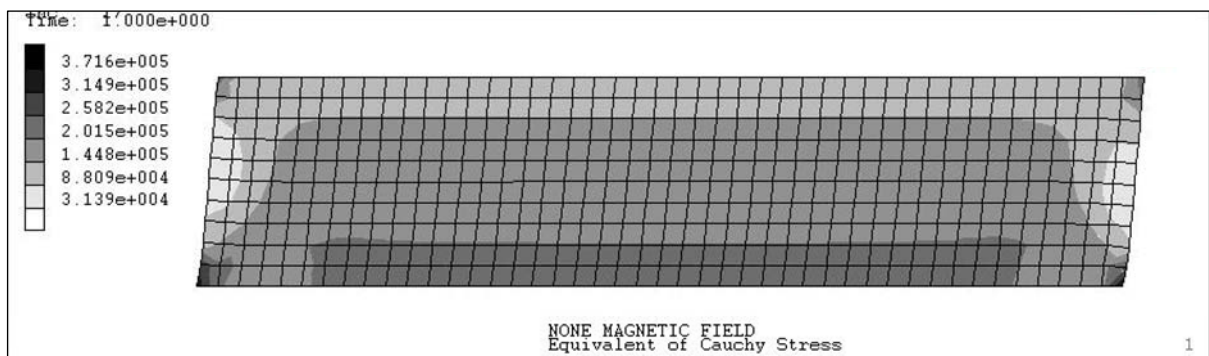


(D) 半径方向均一磁場

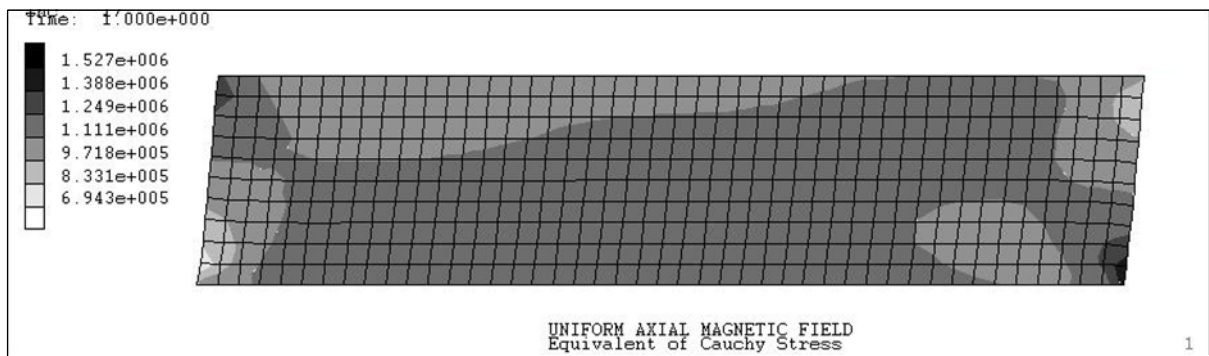
図 6.16 最小主応力等高線図



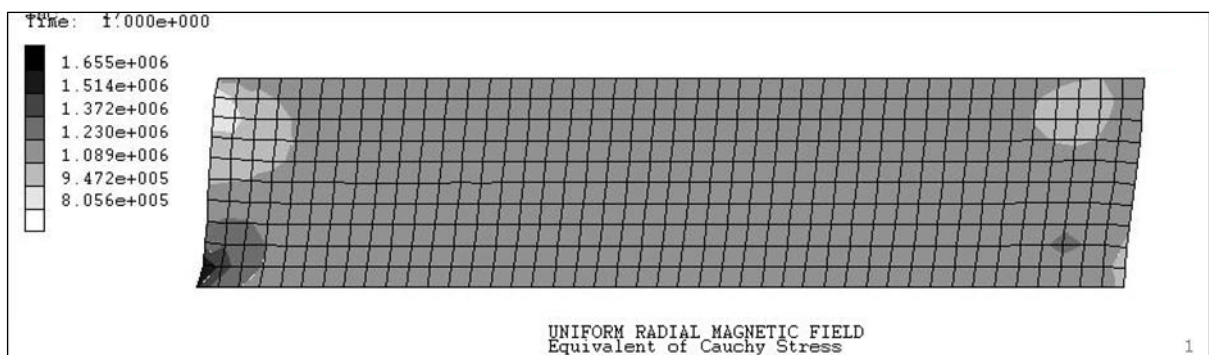
(A) 磁場応力連成解析



(B) 磁場なし



(C) 軸方向均一磁場



(D) 半径方向均一磁場

図 6.17 相当応力等高線図

6.5. 結論

本章では磁場解析の結果を応力解析の初期条件とする弱形式の磁場応力連成解析を行う手法を提案し、磁場の分布により構造物の剛性が変化することを確認し、その有効性を示した。磁束密度分布を初期条件とすることで、磁性エラストマーのひずみエネルギー関数には不変量 I_6 で示される磁束密度の絶対値のみではなく、不変量 I_4 で得られる磁束密度ベクトルから得られる構造テンソルを用いて、磁束密度ベクトルの方向に配向強化された材料として取り扱われる形式とした。

一例として自動車サスペンションブッシュの磁場応力連成解析を扱った。コイル周辺にて強い磁場が形成されることにより、磁性エラストマー内部にて磁束密度方向に機械的な異方性剛性が発現し、構造物全体の剛性が大きく変化することが確認できた。非現実的ではあるが、軸方向あるいは半径方向に一樣な磁束分布を与えた状態で、同じひずみエネルギー関数と材料物性値を用いた応力解析を行い、軸方向に一樣な磁束分布ではわずかな剛性変化しか得られず、半径方向に一樣な磁束分布ではそのマクスウェル応力に反抗するため軸方向の剛性は大きな値となる結果を得た。そして、コイルに電流を与えた実使用に近い状態での磁束密度分布に基づく応力解析では、磁場を考慮しない場合に対して、約 1.5 倍の軸剛性となる結果を得た。また、コイルに電流を与えた磁場解析結果による磁場応力連成解析ではコイル周辺において強い引張場が形成されているため、繰り返し負荷条件による疲労損傷などが予想される。従って、本手法による磁場応力連成解析を行うことで、構造物の詳細検討を行え、疲労寿命の予測などを数値解析で行うことが可能であると考えられる。

本手法での磁場応力連成解析は弱形式としているので、応力解析においては磁場解析に必要な空気層の有限要素を必要とせず、時間費用を大幅に低減できる。磁性エラストマーのような非線形材料の応力解析では、繰り返し計算によりその非線形解析が行われるので、要素数を減らすことは有限要素法解析の時間費用を低減するために有効な手段であり、本手法を用いることで、磁場応力連成解析を効率よく行うことが可能であるといえる。

本研究で開発した、磁性エラストマーのひずみエネルギー関数および磁場応力連成解析手法を用いることで、実構造物の磁束密度勾配に依存した機械的特性を解明することが可能となる。本研究は磁性エラストマーを使用した製品の試作・実験を補える有効な手法であるといえる。

第7章 結論

本研究では、自動車産業のみならず、宇宙、輸送、建築などの多くの産業分野で、今後の利用が広がると予想される機能性エラストマーの力学的挙動の解明と、その材料物性値や形状などの各設計変数の最適化を実現することを目的に、有限要素法における数値解析理論を導出し、その有効性について検討した。機能性エラストマーとして繊維複合材料と磁性粒子複合材料を取り扱い、有限要素法での超弾性体構成則の導出を根幹として、解析及び実験の両面から検討し、

- 1) 異方性エラストマーの超弾性体構成則の導出
- 2) 異方性エラストマーのひずみエネルギー関数の導出および材料定数の同定方法の確立
- 3) 磁性エラストマーの超弾性体構成則の導出
- 4) 磁性エラストマーのひずみエネルギー関数の導出および材料定数の同定方法の確立
- 5) 磁性エラストマーの外部磁場変化による剛性変化の実験と数値解析による検証
- 6) 磁場応力連成解析手法の確立と数値実験

を行った。以下に、本研究の結果の概要を示す。

第1章では、本研究の位置づけを示すとともに、磁性粒子複合材料の適用事例および既存の超弾性体のひずみエネルギー関数についてまとめ、従来の方法における技術的課題について述べた。

第2章では、繊維複合材料を取り扱うために、異方性を有する超弾性体の材料構成則について論じ、現象解析に必要な支配方程式について整理した。異方性の挙動を数値解析に含めるには配向方向のベクトルから得られる構造テンソルによる不変量を追加することが必要であることを示した。さらに不変量を変数とするひずみエネルギー関数において、応力テンソルならびに陰解法による非線形有限要素法で必須である接線勾配を様な形で示した。これらはひずみエネルギー関数の次数や形式には依存しないので、ひずみエネルギー関数の不変量による微分値のみを変更することで、不変量に基づく任意のひずみエネルギー関数を取り扱うことが可能である。また、従来の研究では一方向に繊維強化された横等方性を考慮に入れた超弾性体のひずみエネルギー関数は論じられているが、空間座標と物質座標の二つの座標系に基づいた接線剛性マトリックスの導出はなされていない。このため、本論文では非線形解析における収束計算の精度を向上させるための空間座標と物質座標での接線剛性について、整合性の取れた陽な形式で導出した。

第3章では、異方性材料の物性値によっては、配向主軸圧縮方向に座屈挙動が発現することを理論解によって示しその条件を回避するために、配向主軸の引張・圧縮の状態により異なる材料物性値を使用できる異方性超弾性体のひずみエネルギー関数を導出した。そして、異方性を有するゴム材料の材料物性値を同定するためには、単軸試験の応力-ひずみ関係のみでなく、一軸拘束二軸引張試験の応力-ひずみ関係から、配向主軸方向に直角な断面内のひずみ比率を算出する必要があることを示し、材料物性値の同定手法を確立した。

そして、導出したひずみエネルギー関数と物性値の同定手法を検証するために、実使用されている工業部品として伝動ベルトのゴム材料を用いて、単軸試験および一軸拘束二軸引張試験を行い、配向主軸方向にその強い材料異方性があることを示した。そして、同定した物性値と提案したひずみエネルギー関数を用いて数値解析を行い、実験値との比較を行い、確立したひずみエネルギー関数と材料物性値同定手法を用いることで、精度良く実構造物の数値シミュレーションを行えることを示した。

第4章では、磁場中において機械的剛性が変化する磁性エラストマーを超弾性体として取り扱い、有限要素法で解析するために必要な磁性エラストマーの超弾性構成則の支配方程式を導いた。磁場中においては、磁性エラストマーにはマクスウェル応力が働くので、その効果を有限要素法解析で計算するためには、ひずみエネルギー関数に材料内部の磁束密度ベクトルによる磁場構造テンソルを含める必要があることを示した。そして、磁場構造テンソルによる磁場の影響を含めた形式で、磁性エラストマーの超弾性構成則として、応力テンソルを導出した。この磁場構造テンソルは異方性の超弾性構成則における初期配向ベクトルで構成される構造テンソルと等価であり、第2章で示した異方性超弾性体の構成則中の配向ベクトルをラグランジェ空間の磁束密度ベクトルで置き換えることで容易に取り扱えることを示した。

第5章では、磁性粒子を含む磁性エラストマーの変形解析を行うために、磁性エラストマーのひずみエネルギー関数を導出し、その材料物性値の同定手法を考案した。磁性エラストマーに外部磁場を与えると、機械的な剛性変化が発現する。その剛性変化を有限要素法解析で精度良く取り扱うための磁性エラストマーのひずみエネルギー関数には、磁束密度変化に応じてせん断剛性が変化する形式を考案した。さらに、磁場が飽和することで剛性値の変化が見られなくなる領域まで考慮できるように Langevin 関数をひずみエネルギー関数に組み込んだ。導出したひずみエネルギー関数と材料物性値の同定手法を検証するために、磁性粒子を含む磁性エラストマーの試験片の作製方法について論じ、作製を行った。PDMS に、磁性粒子を懸濁させるためには、界面活性剤などを使用することが必要であることがわかった。

そして、ひずみエネルギー関数の材料物性値を同定するために、作製した試験片に外部磁場を与えた状態で、純せん断試験を行い、定性的にその剛性が変化する結果を得た。得られた実験結果から、本研究で考案した材料物性値の同定手法を用いて材料物性値を導出し、有限要素法により数値解析を行った。有限要素法解析プログラムには、本研究で導出した磁性エラストマーのひずみエネルギー関数と材料物性値を組み込み、純せん断試験を再現し、実験値と良く一致する結果を得ることができた。

第6章では、第5章の磁性エラストマーのひずみエネルギー関数を、磁束密度勾配にも依存できるように拡張し、その効果を確認するために、磁性エラストマーを使用した自動車用サスペンションブッシュの磁場応力連成解析による数値実験を行った。サスペンションブッシュ内の磁性エラストマーは、コイルに電流を流すことによって発生する磁場の影響により、磁束密度の方向に繊維強化された材料と等価となることで剛性が増大し、磁場のない状態よりも軸方向の剛性が大きく変化することを確認した。本研究で開発した、磁性エラストマーのひずみエネルギー関数および磁場応力連成解析手法を用いることで、実構造物の磁束密度勾配に依存した機械的特性を解明することができ、磁性エラストマーを使用した製品の試作・実験を補える有効な手法であることを示した。

第2章から第6章で示した結果を総合すると、以下のことがいえる。

本研究で確立した機能性エラストマーの数値解析理論は、繊維複合材料である異方性ゴム材料ならびに粒子複合材料である磁性エラストマーの動作特性を定量的にかつ効率良く解析できる数値計算手法の基礎となるものであり、今後さらに発展が期待できる。本研究の対象分野は広く、医療、自動車、宇宙、建築などの多くの産業分野の研究開発において、広く適用しうるものである。今後、ナノテクノロジー及び環境問題に向けての、技術開発に寄与することが期待される。

参考文献

- [1] 久保亮五, “ゴム弾性 [初版復刻版]”, 裳華房, 1996
- [2] Ginder, J.M., Nichols, M.E., Elie, L.D., Tardiff, J.L., Magnetorheological Elastomers: Properties and Applications, in Smart Structures and Materials 1999: Smart Materials Technologies, ed. By Wuttig, M., (1999), pp 131-138
- [3] Jolly, M.R., Carlson, J.D., Muñoz, B.C., A model of the behaviour of magnetorheological materials, Smart Mater. Struct., Vol.5, (1996), pp.607-614
- [4] Carlson, J.D., Jolly, M.R., MR fluid, foam and elastomer devices, Mechatronics, Vol.10, (2000), pp.555-569
- [5] Ginder, J.M., Clark, S.M., Schlotter, W.F., Nichols, M.E., Magnetostrictive phenomena in magnetorheological elastomers, Int. J. Modern Phys. B, Vol.16, No.17-18, (2002), pp.2412-2418
- [6] Ginder, J.M., Davis, L.C., Shear stresses in magnetorheological fluids: Role of magnetic saturation, Appl. Phys. Lett., Vol.65, No.26, (1994), pp.3410-3412
- [7] Kordonsky, W.I., Magnetorheological effect as a base of new devices and technologies, J. Magn. Magn. Mater., Vol.122, (1993), pp395-398
- [8] Bossis, G., Abbo, C., Cutillas, S., Lacis, S., Métayer, C., Electroactive and electrostructured elastomers, Int. J. Modern Phys. B, Vol.15, No.6-7, (2001), pp.564-573
- [9] Varga, Z., Filipcsei, G., Zrínyi, M., Electric and Magnetic Field-Structured Smart Composites, Macromol. Symp., Vol.227, (2005), pp.123-133
- [10] Varga, Z., Filipcsei, G., Zrínyi, M., Magnetic field sensitive functional elastomers with tuneable elastic modulus, Polymer, Vol.47, No.1, (2006), pp.227-233
- [11] Chase, V.D., New system prevents shake, rattle & roll, Appliance Manufacturer, Vol. 44, No.5, (1996), pp.6
- [12] Carlson, J.D., Weiss, K.D., US Patent (1995) 5,382,373
- [13] 武富荒, 近角聡信, “磁性流体—基礎と応用”, 日刊工業新聞社, 1988
- [14] 神山新一, “磁性流体入門”, 産業図書, 1989
- [15] Rosensweig, R.E., “FERROHYDRODYNAMICS”, Dover Publications Inc., 1997
- [16] Uchino, K., Giniewicz, J.R., “Micromechatronics”, Marcel Dekker Inc, 2003
- [17] 日本ゴム協会, “ゴム技術入門”, 丸善株式会社, 2004
- [18] Fung, Y. C., “Foundations of Solid Mechanics”, Prentics-Hall, 1965, pp.451
- [19] Simo, J.C., Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, Comput. Methods Appl. Mech. Engr., Vol.99, (1992), pp.61-112
- [20] Simo, J.C., Taylor, R.L., Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastoplasticity, Comput. Methods Appl. Mech. Engr., Vol.35, (1982), pp.107-118
- [21] Ogden, R.W., Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike materials, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A328, (1972), pp.567-583

- [22] Simo, J.C., Armero, A., Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.33, (1992), pp.1413-1449
- [23] Treloar, L.R.G, “The Physics of Rubber Elasticity”, Oxford University Press, (1975)
- [24] Mooney, M., A Theory of Large Elastic Deformation, *J. Appl. Phys.*, Vol.11, No.9, (1940), pp. 582-592
- [25] Ogden, R.W., Elastic deformation of rubber-like solids, in H.G. Hopkins and M.J. Sewell eds, *The Rodney Hill 60th Anniversary Volume*, Pergamon Press, (1981), pp.499-537
- [26] Valanis, K.C., Landel, R.F., The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios, *J. Appl. Phys.*, Vol. 38, (1967), pp.2997-3002
- [27] Gent, A. N., A new constitutive relation for rubber, *Rubber Chem. Tech.*, Vol. 69, (1996), pp.59-61
- [28] Arruda, E. M., Boyce, M. C., A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, (1993), pp.389-412
- [29] Brigadnov, I.A., Dorfmann, A., Mathematical modeling of magneto-sensitive elastomers, *Int. J. Solids Struc.*, Vol.40, (2003), pp.4659-4674
- [30] Kankanala, S.V., Triantafyllidis, N., On finitely strained magnetorheological elastomers, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.52, (2004), pp.2869-2908.
- [31] Steigmann, D.J., Equilibrium theory for magnetic elastomers and magnetoelastic membranes, *Int. J. Nonlinear Mech.*, Vol.39, (2004), pp.1193-1216.
- [32] Dorfmann, A., Ogden, R.W., Some problems in nonlinear magnetoelasticity, *Z. angew. Math. Phys.*, Vol.56, (2005), pp.718-745
- [33] Doi, M., Edwards, S.F., “The Theory of Polymer Dynamics”, Oxford University Press, 1986, pp.188
- [34] Miehe, C., Göktepe, S., Lulei, F., A micro-macro approach to rubber-like materials-Part I: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.52,(2004), pp2617-2660
- [35] Fung, Y. C., “Biomechanics Circulation”, Springer, 1996
- [36] Lin, D.H.S., Yin, F.C.P., A Multiaxial Constitutive Law for Mammalian Left Ventricular Myocardium in Steady-State Barium Contracture or Tetanus, *ASME J. Biomech. Eng.*, Vol.120, (1998), pp.504-517.
- [37] Spenser, A. J. M., Constitutive theory for strongly anisotropic solids, *Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites*, CISM 282,(1984),pp.1-32. New York: Springer.F
- [38] Herrmann, L.R., Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. *AIAA Journal*, Vol.3, (1965), pp.1986-1900.
- [39] 小国力, “コンピュータによる連立一次方程式の解法”, 丸善, 1993
- [40] Simo, J.C., A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part I. Continuum Formulation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engr.*, Vol.66, (1988), pp.199-219
- [41] Holzapfel, G.A., “Nonlinear Solid Mechanics”, John Wiley & Sons Ltd., 2000
- [42] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z., “The Finite Element Method, Its Basis & Fundamentals”, 6th ed., Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006
- [43] Rivlin, R.S., Saunders, D.W., Large Elastic Deformations of Isotropic Materials VII. Experiments on the Deformation of Rubber, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser.A*243, (1951), pp.251-288.

- [44] Ogden, R.W., Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, Proc. Roy. Soc. London, Ser.A326, (1972), pp.565-584.
- [45] Hyer, M. W., “Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials”, MacGraw-Hill, 1998
- [46] 山下義裕, 川端季雄, 補強ゴムのひずみエネルギー密度関数の近似式, 日本ゴム協会誌, Vol. 65, (1992), pp.517-528
- [47] 今井功, “電磁気学を考える”, サイエンス社, 1990
- [48] Kovetz, A., “ELECTROMAGNETIC THEORY”, Oxford University Press, (2000)
- [49] Ogden, R.W., “Non-linear Elastic Deformations”. Dover, New York, (1997)
- [50] Kotera, H., Sawada, M., Shima, S., Cosserat continuum theory to simulate microscopic rotation of magnetic powder in applied magnetic field, Int. J. Mech. Sci., Vol.42, (1999), pp.129-145
- [51] Spencer, A.J.M: “Continuum Physics Vol.1 “, Eringen, A.C. Ed., Academic Press, New York, Part III Theory of invariants, 1971
- [52] Tsumori, F., Miyano, N., Fukui, A., Sagawa, K., Kotera, H., “Development of Deformable Micropillar Array using Magnetic Particles and Elastic Material”, Proceeding of Intelligent Processing and Manufacturing of Materials, 2007
- [53] Tsumori, F., Miyano, N., Fukui, A., Sagawa, K., Kotera, H., “Deformable Micro Pillar Array with Magnetic Particles and Elastic Material”, IX International Conference on Computational Plasticity, 2007
- [54] Treloar, L.R.G, Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation, Trans. Faraday Soc., Vol.40, (1944), pp.57-70
- [55] 日本ゴム協会, “ゴム試験法[第3版]”, 丸善株式会社, 2006, pp.224-225
- [56] Watson, J.R., US Patent (1997) 5,609,353
- [57] 日本鉄道車両工業会, “新版 防振ゴム”, 株式会社現代工学社, 1998, pp.160-161

関連発表論文

(A) 学会誌論文

- 1) 高田康弘, 陸建銀, 嶋吉隆夫, 石川覚志, 天野晃, 小寺秀俊, 松田哲也; “実心臓に基づく形状及び円筒形状を用いた左心室拍動シミュレーションにおける収縮末期応力分布の比較”, 生体医工学: 日本エム・イー学会誌, 44 巻, 4 号, 2006
- 2) 石川覚志, 永田孝弘; “ゴムのダメージモデルの数値計算手法”, 日本ゴム協会誌, 80 巻, 2 号, 2007
- 3) 高田康弘, 天野晃, 宋仁煥, 陸建銀, 嶋吉隆夫, 石川覚志, 小寺秀俊, 松田哲也; “興奮伝達時間の左心室壁運動に与える影響 ---リング形状左心室モデルによるシミュレーション研究---”, 生体医工学: 日本エム・イー学会誌, 46 巻, 1 号, 2008
- 4) K.Kanda, S.Ishikawa, J.Ogawa, T.Suzuki, I.Kanno, H.Kotera; “Modal Analysis for Externally Driven Micropump and Additional Mass Effect of Water”, Japanese Journal of Applied Physics, Vol.47, No.6, 2008
- 5) 石川覚志, 徳田明彦, 小寺秀俊; “短繊維を含有したゴム材料の数値シミュレーション”, 日本機械学会論文集, 74 巻, 740 号, A 編, 2008
- 6) 石川覚志, 徳田明彦, 小寺秀俊; “短繊維を含有したゴム材料の数値シミュレーション(第 2 報, 横等方性超弾性体の応力理論解)”, 日本機械学会論文集, 74 巻, 747 号, A 編, 2008
- 7) S.Ishikawa, A.Tokuda, H.Kotera; “Numerical Simulation for Fibre Reinforced Rubber”, Journal of Computational Science and Technology, Vol. 2, No. 4, 2008

(B) 学術講演

- 1) S.Ishikawa, M.A.H.Mohamed, A.Amano, T.Shibayama, T.Matsuda, H.Kotera, A.Noma; “Boundary Conditions and residual Strains in Heart FE Simulation”, Kyoto University International Symposium on “Leading Project for Biosimulation”, 2004
- 2) S.Ishikawa, H.Kotera; “Constitutive equations for fibre reinforced hyperelasticity”, 2nd Kyoto University International Symposium on “Leading Project for Biosimulation”, 2004
- 3) S.Ishikawa, H.Kotera; “Constitutive equations for fibre reinforced hyperelasticity”, Proceeding of the fourth European Conference on Constitutive Models for Rubber, 2005

- 4) 石川覚志, 小寺秀俊; “非アフィン変形と管模型理論を考慮した超弾性構成則”, 日本計算工学会第 13 回計算工学講演会論文集 No.1, 2008
- 5) S.Ishikawa, A.Tokuda, H.Kotera; “A Methodology for Material Parameters of Fiber Reinforced Rubber”, Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics, 2008
- 6) 石川覚志, 小寺秀俊; “磁性エラストマーの数値計算モデル”, 日本機械学会第 21 回計算力学講演会講演論文集, 2008
- 7) 石川覚志, 小寺秀俊; “磁性エラストマーのせん断剛性変化 “, 日本ゴム協会第 20 回エラストマー討論会講演要旨集, 2008
- 8) 石川覚志, 小寺秀俊; “磁性エラストマーの磁場応力連成解析 “, 日本材料学会東海支部第 3 回学術講演会予稿集, 2009

謝辞

本論文の研究を遂行するにあたり、終始御懇切な御指導、御鞭撻を賜りました京都大学大学院工学研究科 小寺秀俊教授に、心より感謝申し上げます。

また、本論文をまとめるにあたって、貴重な御助言と御討論をいただきました京都大学大学院工学研究科 北條正樹教授、田畑修教授に深く感謝いたします。

本研究での中核をなす異方性超弾性体の構成則は、京都大学「細胞・生体機能シミュレーションプロジェクト」へ参画している間に、その基本部分を確立いたしました。同プロジェクトリーダーの京都大学名誉教授、現立命館大学 野間昭典教授ならびに力学的シミュレーショングループリーダーの京都大学 松田哲也教授、天野晃准教授には、心筋細胞の異方性挙動について御教授いただきましたことに、深く感謝いたします。

さらに、伝動ベルトの異方性特性を共同研究し、実験結果等を快く提供していただいた三ツ星ベルト株式会社 徳田明彦氏に深く感謝いたします。

本研究にて行った磁性エラストマーの材料試験片作製において、財団法人京都高度技術研究所 大岡正孝博士に御協力いただきましたことを深く感謝いたします。また、材料試験において京都大学 津守不二夫講師に実験方法の御指導をいただき、修士学生の酒井佑典氏、豊岡卓也氏に治具の作製に御協力いただきましたことを、厚く御礼申し上げます。

そして、不規則な勤務状態にもかかわらず、日頃より研究を支えてくれた妻 敦子に深く感謝いたします。

本研究は多くの方々の御指導と御支援の上で成し遂げられたものであり、ここに心より厚く御礼申し上げます。